Historia Mathematica 11 (1984) 161-192

THE POINCARÉ-VOLTERRA THEOREM: A SIGNIFICANT EVENT IN THE HISTORY OF THE THEORY OF ANALYTIC FUNCTIONS

BY GIORGIO ISRAEL AND LAURA NURZIA
ISTITUTO MATEMATICO "G. CASTELNUOVO,"
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "LA SAPIENZA,"
P. LE A. MORO, 2
00185-ROMA, ITALIA

SUMMARIES

In this article we have reconstructed the history of the Poincaré-Volterra theorem (which asserts that the set of values of an analytic function in a point of its domain of definition is a set of countable power at most). For this purpose we have made use of unpublished material from the Volterra archives, conserved in the Accademia Nazionale dei Lincei. The appendixes provide transcripts of correspondence between Vito Volterra and Georg Cantor, of correspondence between Volterra and Giulio Vivanti, and a manuscript by Volterra. The history of the Poincaré-Volterra theorem clarifies some developments in the theory of analytic functions toward the end of the nineteenth century. In particular, we have shown that the attitude of some of the greatest mathematicians of the period toward Riemann's "geometric" theory was quite negative, while Weierstrass' "arithmetical" theory was regarded as fully satisfactory.

Le but de cet article est d'analyser l'histoire de la découverte du théorème de Poincaré-Volterra: ce théorème démontre que l'ensemble des valeurs qu'une fonction analytique prend en un point de son domaine d'existence, est un ensemble qui a tout au plus la puissance du dénombrable. On a fait usage de matériaux inédits qui sont conservés dans les archives Volterra de l'Accademia Nazionale dei Lincei. Il s'agit d'une correspondence entre Vito Volterra et Georg Cantor, d'une correspondence entre Volterra et Giulio Vivanti et d'un manuscript de Volterra: la transcription de ces lettres et du manuscript se trouve dans les Appendices de cet article. L'histoire du théorème de Poincaré-Volterra sert a éclaircir quelques aspects de l'état de la théorie des fonctions analytiques à la fin du dix-neuvième siècle. On démontre que quelques

0315-0860/84 $3.00

uns parmi les plus grands mathématiciens de l'époque se méfiaient de la théorie "géométrique" de Riemann, tandis qu'ils trouvaient satisfaisante la théorie "analytique" de Weierstrass.

In questo articolo si ricostruisce la storia del teorema di Poincaré-Volterra (il quale asserisce che l'insieme dei valori di una funzione analitica in un punto del suo dominio d'esistenza è un insieme che possiede al più la potenza del numerabile). Allo scopo si fa uso di materiali inediti conservati nell'archivio Volterra presso l'Accademia Nazionale dei Lincei e la cui trascrizione è riportata nelle Appendici: un carteggio fra Vito Volterra e Georg Cantor, un carteggio fra Volterra e Giulio Vivanti ed un manoscritto di Volterra. La storia del teorema di Poincaré-Volterra è utile a chiarire alcuni aspetti dello stato della teoria delle funzioni analitiche verso la fine dell'Ottocento. In particolare si mostra che l'atteggiamento di alcuni tra i massimi matematici dell'epoca nei confronti della teoria "geometrica" di Riemann era improntato a diffidenza, mentre essi trovavano pienamente soddisfacente la teoria "aritmetica" di Weierstrass.

1. RIEMANN'S THEORY OF ANALYTIC FUNCTIONS IN THE LATE NINETEENTH CENTURY

In an article written in 1899, Henri Poincaré traced the different approaches to the modern theory of analytic functions with his usual perspicacity, focusing his attention particularly on the contributions of Cauchy, Riemann, and Weierstrass.

"Cauchy's theory," observed Poincaré, "contained in embryo both Riemann's geometric conception and Weierstrass' arithmetical conception, and it is easy to understand how, by developing in two different directions, it could give birth to the one and to the other." Riemann's point of view therefore represented the geometric approach to the theory of analytic functions.

> *For Riemann, the geometric view played the dominant role; a function is only one of the rules according to which surfaces can be transformed: he tried to represent these transformations without analysing them. Even their possibilities were only established by a summary reasoning process which, very much later, was made more rigorous only at the price of profound modifications and complicated detours.* [Poincaré 1899, 7]

Poincaré showed an evident preference for Weierstrass' approach (founded on a solid arithmetical basis) which he found to be the more rigorous. Like all exponents of "rigor," he attributed a fundamental role to geometric intuition, as long as the study of the notions concerned was not limited to this, but was founded in a "rigorous" manner on definitions of an arithmetical nature [see Israel 1981]. Weierstrass' theory, therefore, seemed more rigorous to Poincaré and more in keeping with his general point of view.

> *Weierstrass' position is at the opposite extreme; his point of departure is the power series, the "element of the function" that is confined within a circle of convergence, to pursue the function outside the circle, we have the procedure of analytic continuation; thus everything becomes a consequence of set theory, and this theory itself is established on a solid arithmetical basis. We are relieved of all doubts which, in the last century and during the first half of this century, often assailed scholars with regard to the principles of infinitesimal calculus, and also with regard to what Lagrange's theory of analytic functions might provoke by reason of its lacunae.* [...]
>
> *Weierstrass' approach has a double advantage:*
>
> *1°. It is, as we have just seen, perfectly rigorous and this rigor is obtained by the simplest means.*
>
> *2°. It can be generalized very easily and can be extended to the case of functions of many variables.*
>
> *We would be careful not to choose one of these two approaches; each one plays its essential role. With the help of Riemann's tool, the intuition will see the general aspect of things by a single coup d'oeil; as a traveller examining from the top of a mountain the topography of the valley which he is going to explore, so that he learns how to find the right way. With the help of Weierstrass' tool, the analysis will make clear afterwards all the recesses of the theory; bringing there an absolute clearness.*
>
> *In a word, Riemann's method is most of all a discovery method, while Weierstrass' method is most of all a demonstration method.* [Poincaré 1899, 7]

Poincaré's words are also a clear indication that, at the end of the nineteenth century, the theory of analytic functions was still far from being unified. In general, the methods of Riemann and Weierstrass were separated and, in some authors' views, complementary (as we have seen in Poincaré); while for others they were considered almost in stark contrast with each other (as we shall see later). Riemann's was considered an essentially intuitive approach which tried to provide a geometric view rather than an "analytic" study of complex functions [1].

Nevertheless, it is well known that the theory of analytic functions was eventually unified within the framework of Riemann's theory, and *not* within that of Weierstrass' method.

> *Cauchy, Riemann and Weierstrass are the three major founders of the theory of functions. For a long time their respective ideas and methods were pursued independently by their followers. Then Cauchy's and Riemann's ideas were fused and Weierstrass' ideas were gradually deduced from the Cauchy-Riemann view, so that the idea of starting from the power series is no longer emphasized. Moreover, the rigor of the Cauchy-Riemann view was improved, so that from this standpoint also Weierstrass' approach is not essential. Full unification took place only at the beginning of the twentieth century.* [Kline 1972, 669]

J. Dieudonné has also emphasized the importance of Riemann's approach in unifying the theory of analytic functions [Dieudonné 1974, 42-57]. He identifies precisely the moment at which the lack of confidence in Riemann's method was finally dissolved. Unwillingness to accept Riemann's methods was really connected with the difficulties of giving a precise definition (and not merely an intuitive idea) of a Riemann surface and of demonstrating its existence; similar difficulties were also present when dealing with the Riemann surface of an algebraic function. The change in attitude was first reflected in a fundamental work by H. Weyl [1913], in which the author gave an *intrinsic* definition of a Riemann surface, i.e., one independent of any embedding in a numerical or projective space. Ultimately, what was needed to achieve a general definition of a Riemann surface was the concept of an "abstract" analytic variety (more generally, of an abstract variety). Consequently the formulation of a satisfactory theory from the point of view of internal coherence, generality, and efficacy, coincided with its axiomatization and developed alongside modern differential geometry. Thus Riemann's theory, deprived of its former intuitive-geometric aspect and placed in the context of modern "abstract" geometry, has overridden Weierstrass' theory. This is one of the many examples illustrating the passage from the nineteenth century view of mathematics, founded on "rigor" and on the idea that the central nucleus of mathematics should be analysis, to the axiomatic view which, on the contrary, favors abstract algebraic and topological concepts and methods, applying these in all branches of mathematics (as happens particularly in the case of the concept of isomorphism). Thus Riemann's theory, rediscovered at the right moment, provided a conceptual frame that was suitable for the unification of the theory of analytic functions in abstract and axiomatic terms. More generally, with the introduction of the concept of "analytic manifold," Riemann's theory offered a model for the axiomatization of other parts of geometry; so much so that Dieudonné, setting out to discuss "New Structures in Algebraic Geometry" during the period 1920-1950, speaks of a "return to Riemann" [Dieudonné 1974, 113]. Dieudonné has even established a close relationship of continuity between Riemann's ideas and modern ones; this will be taken up in greater detail later.

It was quite natural that Poincaré, with his openly anti-axiomatic conception, did not attempt to unify the theory of analytic functions within the framework of an abstract reformulation of the theory of Riemannian surfaces. For Poincaré, the theory of Weierstrass was perfectly satisfactory, and its "arithmetical" character fully corresponded to his own inclinations. The question naturally arises as to whether Poincaré's point of view was shared by the mathematical community of his time. An affirmative answer is supported by two unpublished collections of letters, the first between Vito Volterra and Georg Cantor and the second between Volterra and Giulio Vivanti. Further evidence is also contained in one of Volterra's manuscripts. This material, dating back to 1888, is to be found in the Volterra Archives of the Accademia Nazionale dei Lincei [Israel 1982] and is partially transcribed in the three appendixes at the end of this article.

The letters and manuscripts discuss the so-called theorem of Poincaré-Volterra, which asserts that the set of values of an analytic function at a point of its domain is at most a set of countable power (see, for example, Fichera [1959, 546-548]). This proposition was communicated by Cantor to Vivanti, who proposed in the *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, a demonstration based on Riemann's method. Vivanti's demonstration was considered unsatisfactory by Volterra, in the first place because it was technically defective in some points; in the second place (and this seems to us the most interesting aspect), he did not think it was justified to consider the Riemann surface of an arbitrary analytic function, as no satisfactory construction was available in the non-algebraic case. In a series of letters addressed to Vivanti, Volterra not only criticized the latter's demonstration, but expressed his unwillingness to accept Riemann's method, announcing that he would attempt a demonstration founded on Weierstrass' method, which he considered more trustworthy. Volterra also wrote to Cantor to the same effect, and the latter replied encouraging him in his efforts, declaring that Volterra could "be right in considering use of the Riemann surface suspect in connection with Vivanti's demonstration, at least until the possibility of such a construction in all cases had been demonstrated" (see Appendix A). At the same time that Volterra's note containing a demonstration of this property based on Weierstrass' method [Volterra 1888] was being published, Poincaré also proposed the outline of a demonstration based on the same method [Poincaré 1888]. It should be observed that in a previous work Poincaré had already tried to generalize the notion of a Riemann surface [Poincaré 1883]. This attempt, however, was criticized by Volterra in a letter to Vivanti (letter No. 10 in Appendix B).

Thus, at the end of the nineteenth century, three of the greatest mathematicians--Poincaré, Volterra, and Cantor--adopted similar attitudes when faced with the problem of demonstrating an important property of analytic functions: they all avoided recourse to Riemann's method, acting within the "secure" framework of Weierstrass' theory. This attitude, we have seen, sprang from the conviction that the construction of the Riemann surface of an arbitrary analytic function was far from being clear (contrary to Vivanti's belief, at least at the beginning) and even less definable in precise terms.

Here a question naturally arises: why did none of the three mathematicians attempt to generalize Riemann's construction to the case of non-algebraic functions? Not even Poincaré did so, although he had taken a step in this direction in his above-mentioned work of 1883. This point must be stressed; for despite Vivanti's attempted demonstration based on Riemann's method, no other such attempts were even indicated as a subject for research. Several possible explanations can be put forward. Two elements were certainly present, even though it is difficult to establish in what measure. In the first place, there was the widely held conviction that at a technical level the solution of the problem was premature. But this alone would not have entirely prevented further research. More significantly, Riemann's theory did not appear to be necessary; indeed the methods offered by Weierstrass seemed to be entirely satisfactory.

Historians influenced by the axiomatic point of view have asserted that the birth of modern abstract geometry coincides with the "return to Riemann." Moreover, all the elements that constitute the modern notion of the Riemann surface were already present in Riemann's work:

> *The modern formalization of this notion uses the exigencies underlying Riemann's text directly* [Dieudonné 1978, 151]

> *Besides, the essential idea in Riemann's work is that the Riemann surface must not be connected with a particular many valued function, but set* in abstracto, *in the same way as the complex plane, as a geometric-analytical substratum in which analytic functions may be defined (on the whole or part of the surface); in other words, what we could call, after H. Weyl, a holomorphic manifold of (complex) dimension 1.* [Dieudonné 1974, 49]

It seems clear from the above that not only was the idea "underlying" Riemann's text far from being assimiliated by the mathematical community, but--at least in Poincaré's case--Riemann's text was read in a manner diametrically opposite to that of Dieudonné. Such a state of affairs is not surprising in the case of Poincaré and Volterra, whose ideas were very close to those of Poincaré [Israel 1980].

Poincaré and Volterra can be considered intuitionist mathematicians whose ideas, at least in part, were therefore close to those of Riemann. In particular, they were disposed to appreciate Riemann's geometrical-intuitive approach. This is true mainly for Poincaré, because Volterra had been to some extent influenced by Ulisse Dini's abstract approach in mathematical analysis. However, neither regarded Riemann's method as rigorous. We must point out that in the opinions of both Poincaré and Volterra "rigor" did not mean recourse only to logical deduction in mathematical reasoning (in that they were both influenced by the point of view of the French physico-mathematical school). In fact, logical deduction was, in their opinion, not sufficient to determine the admissibility of a mathematical generalization [Israel 1980, 1981].

Therefore, if we agree on this point with the Bourbaki historians (with Dieudonné, in particular), that the basic ideas of the modern concept of Riemann's surface are found in Riemann's work, then it is easily understood why Poincaré and Volterra, because of their anti-axiomatic position, did not consider the possibility of "completing" Riemann's work in the modern (i.e., axiomatic) way. In other words, if there are "natural" developments--to use a Bourbaki expression--in the history of mathematics, there is no reason to expect that Poincaré and Volterra should have contributed to the "natural" achievement of Riemann's theory within the axiomatic framework.

Cantor also pointed out how Riemann's theory was not rigorous, and he did not consider the possibility of recasting it in an axiomatic framework. However, here the situation is complicated by the difficulty of classifying Cantor's position. Although opposed to the intuitionist point of view in mathematics, Cantor cannot be considered an adherent of the axiomatic point of view. On this point the Bourbaki interpretation is problematical, for it regards the history of mathematics as an univocal though complex process toward the modern (i.e., axiomatic) state of mathematics, which is its "natural" achievement. Although we would not say that the Bourbaki historians have disregarded the specific features of mathematical development, we believe they have often neglected specific research programs and their accompanying general ideas or statements of intent put forward by mathematicians themselves. Instead they have emphasized mainly those features anticipating the advent of axiomatics. As they emphasize the pre-axiomatic content of Riemann's geometry, so they consider Cantor a precursor of axiomatic mathematics, if not its "father" [2]. This is, of course, an oversimplification. If that were the only aspect of Cantor's scientific conception, it would be difficult to clarify our historical problem (i.e., Cantor's attitude toward Riemann's theory). Fortunately the situation is far more complex.

It is true that "none were more faithful to the original content and spirit of Cantor's set theory than those mathematicians who sought to axiomatize it systematically" [Dauben 1979, 268]. Moreover, in two instances Cantor's own work anticipated (within certain limits) subsequent axiomatic developments. First there is his statement that mathematics is "absolutely free in its development, and bound only to the requirement that its concepts permit no internal contradiction" [Dauben 1979, 133]. Second, he defined a framework (the "Cantorian paradise") wherein one of the most important achievements of axiomatics could be realized: the shift from "concrete" classical analysis to the twentieth century functional analysis, i.e., "the shift of focus from *individual* functions to *spaces* of functions" [Browder 1975, 578]. However we must not forget that the separate results of any scientific investigation are linked to a research program. Therefore it is necessary, before emphasizing aspects of continuity, to point out differences between the ideas and programs of the historical periods under examination. With this in mind, we do not feel it is correct to identify Cantor's statement about the "freedom" of mathematics with the "emptying" of mathematical concepts from any content. Although the latter is related to the notion of "freedom," it is not found in Cantor's thought; indeed, it is in some ways opposed to it. Cantor's doctrine of "freedom" of mathematics was related to his philosophical analysis of the number concept; here a distinction was made between the "immanent reality" of that concept and the "concrete reality" that finds expression in the objects of the physical world [Dauben 1979, 132-133]. This idea that mathematics is the study of "immanent realities," free from every connection with the physical world, was a fundamental step towards a formalistic and axiomatic mathematics. But Cantor did not deny the *objective reality* of the number concept: this immanent reality allowed him to free mathematics from every reference to empirical reality. In this way mathematics, for Cantor, was ultimately divorced from the physical world, but his concepts were not "emptied"; they still remained objective realities, although they inhabited an ideal world, different from the physical one. After all, this "realistic" philosophy of mathematics accommodated, in Cantor's work, a revolutionary theory (such as set theory) with a classical approach in mathematical research (in particular in mathematical analysis).

Therefore we should not be surprised either by the fact that Cantor did not consider "completing" in an axiomatic way Riemann's theory, or by his distrust of that theory; a distrust not even mitigated by an intuitionistic approach, as in the case of Poincaré and Volterra.

We turn now to another question: is it possible that the deep meaning of Riemann's concepts, although present in his texts, simply escaped the mathematicians of the period? Dieudonné admits that "to tell the truth, although the manner in which he [Riemann] uses the concept shows that he had a clear intuitive idea of it, he neither tries to describe it in a more precise way, nor to demonstrate that such an object exists, even in the case of the Riemann surface of an algebraic function" [Dieudonné 1974, 48-49].

What were the "exigencies underlying Riemann's text," ones "used directly by the modern notion"?

> *First of all, this surface "coincides with the plane" which gives it locally the same structure as the complex plane. In contemporary terms, we say it is an* analytic manifold *of complex dimension 1 [...] The second essential underlying notion is that this surface* T *is* above the plane, *which is formalized by the existence of a projection mapping* p: T → C, *which is holomorphic. The Riemann surface is therefore the pair* (T,p) *of the analytic manifold* T *(of complex dimension 1) and the mapping* p. [Dieudonné 1978, 151]

To have interpreted Riemann's idea of the coincidence of the surface with the complex plane as a transportation of structure constituted a conceptual change of no small magnitude. Therefore, it is hazardous to maintain that the intuitive idea of the surface being "above the plane" is equivalent to the existence of a holomorphic projection. In reality, to pass from the ideas according to which "the geometric view plays a dominant role" [Poincaré 1899, 7] to the modern formal definition, a key notion was necessary: that of an analytic manifold (more generally, of a differentiable manifold) and of relative morphisms. We maintain that Riemann's notion of manifold [Riemann 1854] was very far from the abstract one of contemporary mathematics. Dieudonné has rightly observed that the fundamental "problem" of Riemann's theory was that of liberating the concept of the Riemann surface from the idea of "embedding" in a numerical or projective space. It is true that, according to Riemann, the notion of manifold had an intrinsic character and the geometry of a manifold was studied in an intrinsic manner. But the manifold was never considered in an abstract way, independent of its embedding: on the contrary, it existed in a well-defined environment, since the notion was deduced from the analysis of the empirical properties of physical space. On the other hand, every abstract mathematical structure requires a notion of comparison: nevertheless, such a notion did not even exist "in nuce" in Riemann's work.

It seems to us that to consider Riemann as a precursor of contemporary abstract geometry is an example of that brutal historical leveling in which historiography of axiomatic inspiration excels. M. Kline quite rightly reminds us of the "paradigm" into which Riemann's mathematical production fits, and which shows that he intended to move in the direction opposite from that of "pure" mathematics: the distinctly geometric-intuitive character of his theory, which seemed insufficiently rigorous not only to Cantor, but also to Poincaré and to Volterra, derives from this.

> *Riemann is often described as a pure mathematician but this is far from correct. Though he made numerous contributions to mathematics proper, he was deeply concerned with physics and the relationship of mathematics to the physical world. [...] As a mathematician, he used geometrical intuition and physical arguments freely. It seems very likely, on the basis of evidence given by Felix Klein, that Riemann's ideas on complex functions were suggested to him by his studies on the flow of electrical currents along a plane.* [Kline 1972, 655-656]

It is evident that the intuitive and "summary" character of Riemann's definition of his surface reflects the empirical nature of the concept itself, which was never introduced as an abstract notion or by means of an abstract definition. If we wish to succeed in demonstrating that the concept of a Riemann surface was defined by Riemann "in abstracto" (and in necessarily forcing the interpretation of the texts), we must forget the empirical nature of the concept. More generally, we must forget that the question that prompted Riemann to create the general notion of manifold was: "What conditions or facts are presupposed in the very experience of space before we determine by experience the particular axioms that hold in physical space?" [Kline 1972, 889]. Finally, we must separate the notion of physical space from that of geometric manifold in Riemann's thought, transforming, in this way, Riemann into a pure mathematician.

In conclusion, the case examined here may contribute to recovering the distinctive historical characters of Riemann's theory as it appeared toward the end of the nineteenth century; and also to showing once again the limits and the poverty of the historical vision inspired by formalism, already effectively critized by Lakatos [1976].

2. THE GENESIS OF THE POINCARÉ-VOLTERRA THEOREM

The issues raised in this article illustrate how the history of the genesis of discoveries often disappears in modern scientific literature. Were it not for the letters and manuscripts found in Rome and reproduced here (see Appendixes), the history of the Poincaré-Volterra theorem would remain unknown. In fact, the only "historical" references on this subject may be found in the first work dedicated to the theorem by the Italian mathematician Giulio Vivanti (1859-1949) [3]. It consists of a note which says: "This theorem, whose existence I suspected, was recently communicated to me by Professor Georg Cantor, who at the time exhorted me to attempt a demonstration of it on my own account" [Vivanti 1888b, 150]. Vivanti's article is dated 30.7.1888, and the theorem is enunciated thus: "Any monogenic analytic function (in the sense given to the word "monogenic" by Weierstrass) takes a countable set of values for every value of the variable; that is to say it is of the first class" [Vivanti 1888b, 150]. The demonstration was based on the use of the Riemann surface and consisted substantially of the two following observations: (a) the sheets of the Riemann surface of a monogenic analytic function that meet at a branch point constitute a countable set; (b) the set of branch points belonging to any sheet of a Riemann surface R is in one-to-one correspondence with a countable system of sheets, and so on.

Vivanti sent this note to Volterra together with some of his other works (see Appendix B, No. 2). From the reconstruction of the chronology of the exchange of letters it can be seen that Volterra did not reply to Vivanti immediately. Evidently interested in the subject, he wrote instead to Cantor (Appendix A, No. 1) to ask his opinion. In the letter to Cantor (Appendix A, No. 1), Volterra discussed Vivanti's note and made several observations which can be summarized as follows. Vivanti, said Volterra, supposes that he has constructed the Riemann surface of an analytic function: but in the case in which there are "lacunary" spaces, the sheets of the surface will not necessarily be connected by branch points (as in the algebraic case, in which this is actually the technique of surface construction). Further, Volterra noted, there was a circularity in Vivanti's reasoning: he has made essential use, in the demonstration, of the countability of branch points, while in reality this is exactly what must be demonstrated. Volterra concluded with the observation:

> *I have been thinking that it must be possible to find a demonstration of the theorem in a completely different way without taking recourse to the Riemann surface, but only by virtue of considerations relating to Weierstrass' methods. I have found such a demonstration but there is no room in this letter to communicate it to you. I think also that you will have demonstrated your theorem through considerations independent of the Riemann surface.* [Appendix A, No. 1]

Cantor replied after four days (Appendix A, No. 2), encouraging Volterra in the direction he had chosen. In a certain sense Cantor went even further because, without entering into details concerning the criticism of Vivanti's demonstration, he observed that the use of Riemann's method in the general case was "suspect, at least until the possibility of this construction in all cases is demonstrated" [Appendix A, No. 2).

After more than a month, during which he was probably working on the subject, Volterra wrote to Vivanti (Appendix B, No. 2), summarizing his criticism in three points: (1) Vivanti neglects the possibility that non-isolated branch points exist (hence the circularity of his reasoning); (2) Vivanti neglects the existence of functions that have no branch points; (3) he declares that he has difficulty in following the demonstration on account of the use made of the Riemann surface, and he expresses doubts as to the possibility of speaking about the Riemann surface of any analytic function. It should be added that the drafts of the letters show that Volterra was about to prepare a note containing a demonstration of the theorem which he presumably intended to send to the *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*.

In his reply of 16.10.1888 (Appendix B, No. 3), Vivanti made the following observations. With regard to point (1) he noted that while singular points may not be isolated as elements of the boundary of the Riemann surface, branch points are always isolated. On point (2) he also tried to adapt his demonstration to the case in which the function does not possess branch points. As for point (3), he admitted that "the question is serious," but maintained that from Weierstrass' definition itself it is possible to see (intuitively) how to define the Riemann surface of an arbitrary analytic function.

In his reply of 18.10.1888 (Appendix B, No. 4), Volterra pointed out that the misunderstanding arose from the different meanings attributed to the term "branch point." According to Volterra, Vivanti's way of thinking comes down to distinguishing two types: branch points at which the function assumes a definite value and those at which the function is indeterminate, although when taken around the branch point the values of the function are exchanged. Volterra proposed to call the latter "lacunary branch points." But the lacunary branch points need not be isolated on each sheet. In fact, it is possible to give an example of a surface on which every branch point is an accumulation point of other branch points. Moreover, it is impossible--continued Volterra--to exclude the existence of an analytic function corresponding to such a surface.

Vivanti was convinced by Volterra's argument and admitted his error (Appendix B, No. 5). He again tried to propose an alternative demonstration, but his attempt met with no success. Volterra did not reply on this point, but after a few days he sent Vivanti a version of the note in which he demonstrated Vivanti's proposition by Weierstrass' method.

Thus Vivanti's demonstration was evidently inadequate and Volterra did not for a moment consider his approach to be a plausible one. On the contrary he seems to have been profoundly skeptical about the consequences of using Riemann's method, choosing instead, right from the beginning, Weierstrass' method. In his opinion it was the use of the Riemann surface itself which rendered the demonstration difficult, and Cantor had reinforced this negative attitude.

In a subsequent letter to Vivanti (Appendix B, No. 10), Volterra proposed to redemonstrate a theorem of Poincaré which asserts that, given a non-uniform analytic function $y(x)$, a variable z can be found of which x and y are uniform functions [Poincaré 1883]. He wrote that Poincaré's demonstration "seems to leave some doubts [...] on account of the use made in it of the Riemann surface." Again, it is the use of the Riemann surface which made Volterra suspect any demonstration in which it was used. This distrust together with a lack of interest in the problem of defining a Riemann surface for very general functions, amounts to a precise and definite paradigmatic choice.

Volterra completed the draft of his article between the end of October and the beginning of November 1888 and presented it for publication in the *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* on 20.11.88. Here it must be noted that on 18.11.88 Vivanti wrote to Volterra announcing the publication by Poincaré of a note, in the *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, containing an outline of the demonstration of the proposition under discussion. Poincaré's proof, based on Weierstrass' method, was similar to the one proposed by Volterra (see Appendix B, Nos. 9-11), although the latter's work was more complex in that it contained a series of theorems concerning many-valued analytic functions, of which our proposition is a corollary. We quote the published version of these theorems:

> THEOREM I. *Given any analytic function, continued as far as possible by Weierstrass' method, it is always possible to choose a countable set of interconnected domains of monodromy such that every analytic point at which the function is single-valued is contained inside one of these domains, and every regular branch point is contained in the boundary of one of them.*
>
> THEOREM II. *It is always possible to choose a countable set of interconnected circles of convergence, such that every analytic point* [4], *where the function is regular, is contained inside at least one of them.*
>
> THEOREM III. *The set of the analytic points corresponding to a point of the complex plane is either empty or countable; in the latter case all the analytic points coincide with that point.*

COROLLARY. *The set of the values of the function corresponding to a point of the complex plane is either empty or countable.*

THEOREM IV. *In every part of a complex plane in which it is possible to continue the function, there are points such that in all the analytic points corresponding to them, the function is regular.*

THEOREM V. *Regular branch points form a countable set.* [Volterra 1888, 358-359]

Several manuscript versions of this work survive in the Volterra archives of the *Accademia Nazionale dei Lincei*. The most complete is the one reproduced in Appendix C which (as the preface to Appendix C shows) is actually the version sent to Vivanti early in November of 1888. As the letters reveal (Appendix B, Nos. 6-8, 10) Vivanti made some significant contributions to the elaboration of some relatively unsatisfactory points of the manuscript. The preface to Appendix C shows how Volterra integrated Vivanti's suggestions into the manuscript version and finally wrote the definitive version of the theorems given above.

It is interesting to note that the manuscript version reproduced in Appendix C contains an introduction in which Volterra summarizes the above-mentioned criticism of Vivanti's demonstration and again expresses his perplexity regarding the appropriateness of using Riemann's method. This introduction was removed from the published version. The only trace of the above discussion present in the final version is a note to the corollary which says that "this property is due to Professor G. Cantor, who communicated it without a demonstration to Dr. G. Vivanti" [Volterra 1888, 359]. It is probable that this was a gesture of courtesy toward Vivanti; but there is no reference either to Vivanti's article or to questions of a general character. In the late nineteenth century there was an increasing tendency (to which Volterra almost never submitted) to conceive of a scientific article as a dry communication of results, without any reference to questions of a general character. And we know that this praxis gave rise to considerable obstacles to the comprehension of the orientations and motives which inspired modern mathematical research.

APPENDIX A: THE CORRESPONDENCE BETWEEN VOLTERRA AND CANTOR

The correspondence between Volterra and Cantor is conserved in the Volterra archives in the Accademia Nazionale dei Lincei. It consists of a letter and a visiting card from Cantor and four drafts of letters by Volterra (three of which relate to the same letter). The letters and the drafts are transcribed and reproduced here in chronological order. The transliteration does not correct the misspellings appearing in the original text. The visiting card (No. 5 in the list) was probably written by Cantor to thank Volterra for sending him extracts of his works. The few words written on the card are in Italian and the date is "11 Juni 1889."

1. Draft of a Letter from Volterra to Cantor

This draft is written in pen on four sides of a folded sheet of writing paper and shows numerous corrections and cancelations. Our transcript does not reproduce the passages that are canceled by a stroke of the pen. The date was added in pencil. In the list of letters to be found in the archives it is placed as No. 1 and the content is indicated erroneously ("on the theory of linear differential equations").

Monsieur Florence 21/8/1888

Je prends la liberté de vous envoyer quelques memoires que j'ai publiées. Je regrette beaucoup, Monsieur, de ne posseder plus aucune copie d'une petite note que j'ai publiée il y a quelques années, ou se trouve la demonstration du théorème que je vous ai enoncé dernièrement lorsque j'ai eu l'honneur de vous voir a Halle. Le théorème dont je vous ai parlé est le suivant. Soient A et B deux groupes de points überalldicht dans l'interval ab et soit $f(x)$ une fonction qui est continue dans les points A et $\phi(x)$ une fonction qui est continue dans les points B. Les groupes A et B doivent avoir des points communs. En effet soit σ un nombre quelconque. Dans tout interval compris entre ab on devra trouver un interval ou simultanément les deux fonctions $f(x)$ et $\phi(x)$ ont des *sauts* inférieurs à σ. Et par suite dans tout interval compris entre ab on devra trouver des points ou $f(x)$ et $\phi(x)$ simultanément sont continues. Il en suit que si $f(x)$ est continue dans le groupe A et discontinue dans tous les autres points de l'interval ab qui forme un groupe B, il sera impossible de construire une fonction continue en B et discontinue en A. Il me semble maintenant que de ce théorème on peut déduire le célèbre [Théorème (?)] que vous avez trouvé dépuis [...] Si on a dans l'interval ab un groupe quelconque überalldicht et dénombrable il est toujours possible de construire une fonction qui est discontinue dans ce groupe et continue dans les autres points de l'interval (Il suffit de prendre une fonction qui dans l'n-ème point du groupe a la valeur $1/n$ et dans tous les points [...]) On a donc par le théorème precedent que en ôtant de l'interval ab tous les points du groupe denombrable l'ensemble qui reste n'est pas denombrable.

Je viens de recevoir de M^r^. Vivanti une petite note où se trouve une démonstration d'un beau théorème dont vous lui avez communiqué l'enoncé sur les nombres des valeurs d'une fonction analytique.

La démonstration de M^r^. Vivanti est très simple mais elle suppose qu'on ai déjà construite la surface de Riemann relative à la fonction analytique et que les feuillet se rattachent par des points de diramation ce qui peut ne pas se presenter lorsque il y a des espaces lacunaires. Cela me semble que puisse presenter quelque difficulté si on pense à la méthode qu'on suit lorsque on construit les surface de Riemann pour les fonctions algébriques parce que dans ces construction on commence par supposer d'avoir en quelque sorte étendu sur le plan complexe tous les valeurs de la fonction et puis on commence par chercher les points de diramation et après cela on cherche à attacher les valeurs par la continuité en poussant ainsi les feuillets de la surface. Cette construction bien simple pour les fonctions algébriques [me(?)] presente quelque difficulté lorsque on veut l'imaginer pour les fonctions analytiques les plus genérales qui peuvent posseder des *espaces lacunaires* et dont on ne sait pas même si les nombres des valeurs est dénombrable. C'est cela qu'on veut démontrer!

A cause des espaces lacunaires on pourra même avoir des feuillets qui se rattachent sans qu'y corresponde un point de diramation.

J'ai pensé qu'on doit trouver une demonstration du théorème d'une façon tout a fait différente sans recourir aux surfaces de Riemann, mais seulement en vertu de considérations relatives aux méthodes de Weierstrass. Je viens de trouver une telle démonstration, mais il n'y a pas de place dans cette lettre pour vous la communiquer. Je pense aussi que vous aurez demontré votre théorème par des considérations indépendentes des surfaces de Riemann.

Vous voudrez bien m'excuser Monsieur si je vous ai dérangé pour une lettre si longue. [...]

2. *Letter from Cantor to Volterra*

The letter is written in pen on the first two sides of a folded sheet of writing paper. It is No. 2 on the list.

Mein lieber Herr College! Blankenburg am Harz d. 25^h Aug. 1888

Empfangen Sie meinen verbindlichsten Dank sowohl für Ihre interessanten Abhandlungen, die auch für Ihren freundlichen Brief v. 21^h Aug. Sie haben die Höflichkeit, sich am Schlusse des Letzeren zu entschuldigen wegen seiner angeblichen Länge. Allein hierin kann ich Ihnen durchaus nicht zustimmen. Wissenschaftliche Mittheilungen von einem so ausgezeichneten jungen Collegen können für mich niemals zu lang ausfallen, auch wenn sie viele Bogen füllen; ich werde sie stets mit Vergnügen empfangen.

Der Satz, von welchem Sie mir den Beweis skizziren, scheint mir sehr merkwürdig und ich werde ihn genau prüfen.

Auch ich habe von Herrn Vivanti seine Note über den Satz erhalten, dass die Mehrdeutigkeit analytischer Funktionen *höchstens* unter die *erste* unendliche Mächtigkeit (premier puissance) fällt. Diesen Satz habe ich schon von mehreren Jahren aufgestellt und zuerst Herrn Weierstrass mitgeteilt, der mir einige Jahre später erzählte, dass er ihn mit Hülfe seiner Theorie der Minimalflächen beweisen könne.

Sie mögen Recht haben, an dem Vivantischen Beweise die Herausziehung Riemannschen Flächen für bedenklich zu halten, wenigstens so lange ein Nachweis für die Möglichkeit dieser Construction in allen Fällen noch nicht erbracht ist.

Ich bin augenblicklich mit anderen Arbeiten zu sehr in Anspruch genommen, und dasjenige, was ich vor längerer Zeit über den Beweis dieses Satzes gefunden habe, zu prüfen und druckfertig zu machen.

Umsomehr würde es mich freuen, wenn Sie Ihre Resultate als Ergänzung und Vervollkommnung dessen, was Herr Vivanti gemacht hat, veröffentlichen wollten. Wenn Sie Herrn Vivanti sehen, so grüssen Sie ihn vielmals von mir. Entschuldigen Sie die Kürze meines Schreibens, da ich auf einer Reise bin, von welcher ich zu Anfang des September nach Halle zurückkehren werde.

Mit freundlichem Gruss Ihr

hochachtungsvollergebener

Georg Cantor

3. *Draft of a Letter from Volterra to Cantor*

Three drafts relating to the same letter can be found among Volterra's correspondence. The first is marked No. 3 and is not dated. The other two are marked with the same number 4, are almost identical, and are slightly different from the previous one. One of the last two bears the date 22.12.1888. We only reproduce here draft No. 3, which is the most complete.

Monsieur

Dans le mois d'Aout j'ai eu l'honneur de vous écrire. Je vous ai dit que je venais de trouver une démonstration du théorème si interess [...] sur la théorie des fonctions que vous aviez communiqué à M. Vivanti. M. Vivanti avait cherché d'en donner une demonstration en employant les surfaces de Riemann mais je vous disais que ce n'était pas nécessaire de recourir à une méthode que se presentait d'une façon qui n'était pas rigoureuse. On pouvait demontrer le théorème par la méthode de M. Weierstrass. Vous avez été si aimable de m'engager a publier ma demonstration. Je viens de presenter à l'académie des Lincei une petite note où votre théorème est démontré par les méthodes de Weierstrass. Si vous avez l'obligeance de [...] vous verrez qu'il y a un théorème (théorème I) d'où decoulent plusieurs consequences entre lesquelles votre théorème. Je vous prie Monsieur d'agréer en hommage ma petite Note et de vous souvenir. [...]

APPENDIX B: THE CORRESPONDENCE BETWEEN VOLTERRA AND VIVANTI

The correspondence between Volterra and Vivanti is conserved in the Volterra archives in the Accademia Nazionale dei Lincei. It includes letters and drafts numbered from 1 to 34, in chronological order. A careful examination, however, shows that this ordering is erroneous in some points; moreover, some drafts are identical. We offer below transcripts of the correspondence in correct chronological order. The complete texts of the letters from No. 1 to No. 12, which are more strictly related to the subject of this paper, are reported below; only a brief summary of the contents of the other letters is provided here.

The letters from No. 13 to No. 16 are particularly interesting from a mathematical point of view because they deal with some properties of infinitely many-valued analytic functions connected with Fuchs' works on abelian integrals [5].

The letters from No. 17 to No. 31 are not related to mathematical topics; the subjects are mainly personal. In fact, many of them are concerned with Vivanti's academic career.

The last one (No. 32) contains Vivanti's comments on Volterra's dissertation: "Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali" (Annuario della R. Università di Roma, 1901-1902).

All letters and drafts are written in pen.

1. *Letter from Vivanti to Volterra*

This is a brief letter sent from Mantova on 27.4.1887 in reply to a letter from Volterra (not available) in which the latter asked Vivanti to send some works. Vivanti shows interest in an exchange of correspondence on questions of research. It appears as No. 1 on the list of the correspondence to be found in the archives.

2. *Draft of a Letter from Volterra to Vivanti*

The material marked No. 2 on the list consists of a fragmentary and incomplete draft (C) of a letter from Volterra to Vivanti which alludes to some of the objections he had already expounded in his letter to Cantor. No. 18 on the list, however, consists of another sheet (written in pen with cancelations and corrections like the first), containing the fragmentary text of a draft (B) evidently related to the same letter, and also the text of another draft (A), which should be one of the earliest drafts of the note we are dealing with (and which he probably originally intended to send as a letter to the Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo). For the above-mentioned reasons we have arranged the drafts in the order (A), (B), (C). The number 18 assigned to drafts (A) and (B) on the archive list is incorrect from the chronological point of view. Drafts (B) and (C) are not dated, but the letter to which they refer should be of 13.10.1888 (see the following No. 3). Finally, on the back of (C) there are a few sentences constituting part of a letter thanking the President of the Accademia Nazionale dei Lincei for Volterra's appointment to the position of Corresponding Member.

(A) L'importanza del teorema considerato dal Dr. Vivanti non può essere sfuggita [...] Mi permetto di presentare a cotesto suo Circolo alcune considerazioni relative al teorema del Dr. Vivanti [...] Prima di tutto penso che sia necessario di ben chiarire l'enunciato del teorema onde non possano nascere dei dubbii sul suo riguardo [...] Peraltro sembra che implicitamente l'A venga nel corso della dimostrazione a porre alcune restrizioni alla generalità del teorema. Così egli parte dal supporre già costruita una superficie di Riemann corrispondente alla funzione analitica con dei fogli ben definiti. Egli non accenna esplicitamente al caso che esistano degli spazii lacunari e in certo senso sembra che egli li escluda giacché ammette che a più fogli che si attaccano fra loro debbano corrispondere sempre dei punti di diramazione il che potrebbe anche non accadere se esistessero gli spazii lacunari suddetti. L'A ammette pure che i punti di diramazione debbano essere punti isolati di diramazione donde conclude che essi debbono formare un insieme numerabile. Però nel caso il più generale delle funzioni analitiche non è escluso che possano immaginarsi punti di diramazione non isolati ed anche non so che sia stato dimostrato che i detti punti non possano anche essere un insieme non numerabile.

Tutto ciò porta a concludere che la dimostrazione ben semplice del Dr. Vivanti pone alcune restrizioni al teorema. [...]

(B) La ringrazio della note che si è compiaciuto inviarmi.

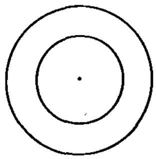
Il teorema contenuto nell'ultima di esse mi sembra molto interessante. Ho trovato però qualche difficoltà nel seguirla nella dimostrazione che Ella ne ha data, per essersi valsa nella dimostrazione delle superficie di Riemann. Infatti come si procede nei casi più semplici, per esempio delle Funzioni algebriche per costruire le superficie di Riemann? Si immaginano già distribuiti nel piano complesso tutti i valori della funzione e poi si immagina di prendere i punti dove sono valori eguali (punti di diramazione) e si eseguiscono i tagli opportuni e i modi di collegarsi dei varii tagli. Ciò non presenta difficoltà pel caso notissimo delle funzioni algebriche. Così pure in certi casi particolari considerati da varii autori ove la funzione può avere infiniti valori; ma allorché si considera il caso generale in cui si voglia partire da una funzione arbitraria di cui si conosce solo un elemento (secondo il vocabolo usato da Weierstrass). [...]

(C) Preg^{mo} Signor Dottore

Debbo prima di tutto rigraziarla per l'invio che Ella mi ha fatto ultimamente di varie su note. Fra queste ve ne è una pubblicata nei Rendiconti del Circolo Matematico relativa alle funzioni ad infiniti valori, nella quale viene dimostrato un teorema comunicatole dal Sig Cantor. Il teorema è importante e la dimostrazione che Ella ne dà è molto semplice, però mi sembra che essa si fondi su considerazioni che possono porre delle restrizioni alla generalità dell'enunciato. [...]

Permetta che chiarisca queste diverse affermazioni. Comincerei relativamente alle superfici di Riemann.

Quanto alla possibilità di avere una funzione a più valori senza punti di diramazione e ciò dipendentemente dall'esistenza di spazii lacunari, basta pensare ad una funzione monodroma $f(z)$ con due spazii lacunari σ e σ'. Presi due punti a ed a' entro di essa.



La funzione $\phi(z) = \sqrt{(z - a)(z - a')}\ f(z)$ non potrà avere [...] entro gli spazii σ e σ' e sarà a due valori e non avrà punti di diramazione. [...]

3. Letter from Vivanti to Volterra

This is the reply to Volterra's letter from which we have reproduced fragments of the draft in No. 2. It appears as No. 4 on the archive list.

Ch^{mo} Sig Professore Mantova 16-10-88

La ringrazio assai della gentile Sua lettera del 13 [...] alla quale mi affretto a rispondere.

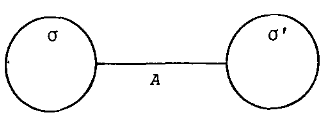
Le obiezioni che Ella fa alla mia dimostrazione sono essenzialmente tre, ed io devo prenderle in considerazione nell'ordine inverso a quello da Lei tenuto.

Ella osserva che possono esistere per certe funzioni punti di diramazione non isolati. Ora, che una funzione possa avere punti singolari non isolati, ed anche linee interamente costituite di punti singolari, è cosa notissima; ma questi punti o queste linee non costituiscono altro che il *contorno* della riemanniana rappresentante la funzione, e non fungono mai da punti di diramazione. Nei punti di diramazione i valori della funzione sono determinati, e soltanto avviene che taluni di essi sono tra loro identici; invece nei punti singolari tali valori sono indeterminati.

Per prendere l'esempio da Lei citato, la funzione $\sqrt{sen\ (\pi/\sqrt{z})}$ ha in tutti i punti $z = 1/n^2$ dei punti di diramazione, mentre per $z = 0$ ha un punto singolare, che costituisce da se solo il contorno della riemanniana, come il contorno della riemanniana ad un solo foglio rappresentante una funzione intera trascendente è costituito dal solo punto $z = \infty$; soltanto nel caso nostro $z = 0$ congiunge tutti i fogli; ma il passaggio dall'uno all'altro di essi può e deve sempre effettuarsi senza ritornare a questo punto.

Che i punti di diramazione poi debbano costituire un sistema isolato risulta dal fatto che deve potersi fare un intero giro intorno ad ognuno di essi senza incontrare altri punti simili. E riprendendo l'esempio precedente, Ella vedrà che i punti di diramazione costituiscono appunto un sistema isolato.

In secondo luogo, Ella mi fa notare giustamente che vi sono funzioni non aventi punti di diramazione. Supposta costruita la riemanniana d'una di tali funzioni, vi saranno in essa delle sezioni (Querschnitte) che andranno da un punto ad un altro del contorno senza passare per alcun punto di diramazione; tale sarebbe, per la funzione de Lei considerata, la linea A.



E di questo caso veramente non si è tenuto conto nella mia dimostrazione. Ma mi sembra non sia difficile colmare la lacuna. S'imaginino tutte le sezioni della natura della

A che si trovano sopra un foglio, e si costruisca una linea (geometrica o no) che tagli ciascuna di esse (le quali non possono intersecarsi fra loro) in un punto solo posto a distanza finita dal contorno. Allora è facile vedere che l'insieme di questi punti deve essere isolato, giacché deve ogni sezione potersi racchiudere in una striscia che, almeno a distanza finita dal contorno, abbia larghezza finita. E poiché lungo ogni sezione non v'è continuità che fra due soli fogli, il teorema resterebbe dimostrato anche nel caso che consideriamo.

Resta la terza e più grave questione, se cioé qualunque funzione analitica possa ritenersi rappresentabile mediante una riemanniana. Credo sia tutt'altro che facile istituire una discussione rigorosa su questo punto; ma per parte mia, quando penso al modo con cui secondo il Weierstrass si genera una funzione analitica monogena mediante un elemento di essa, mi pare di vedere come possa costruirsi la riemanniana in qualunque caso generale. Forse Le scriverò più a lungo un'altra volta su questo argomento; gradirò intanto sapere ciò che Ella pensi di quanto sin qui Le ho esposto.

Il prof. Cantor mi scrisse ultimamente di aver fatto con molto piacere la di Lei conoscenza. Egli Le avrà parlato della sua teoria degli *Ordnungstypen*, e forse Le avrà fatto conoscere i suoi scritti sull'argomento. Questa teoria, ancora in fasce, promette di riuscire assai interessante, ed io mi sono sobbarcato volentieri a farne conoscere al pubblico italiano i principi in un articolo che uscirà fra non molto negli Annali.

Permetta che Le faccia le mie sincere congratulazioni per la Sua memoria sulle equazioni differenziali, e per gli altri studi inseriti negli Atti dei Lincei. Ebbi occasione di studiare accuratamente questi Suoi lavori per darne relazione nell'Jahrbuch, e mi pare che abbiano veramente un'importanza non comune e che sieno da porsi fra le più belle ricerche d'analisi venute ultimamente in luce. Sono assai desideroso di vederne la continuazione, come pure desidero assai di conoscere le nuove ricerche sulle funzioni polidrome di cui Ella mi scrive.

Accolga, chiarissimo Signor Professore, i miei più distinti saluti e mi creda con tutta stima

Dev^{mo}
G. Vivanti

4. *Drafts of a Letter from Volterra to Vivanti*

In the correspondence two drafts (Nos. 3 and 5 on the archive list) constitute Volterra's reply to the previous letter from Vivanti. The first of the two is incomplete and undated. The second (dated 18.10.1888) is evidently the definitive version, although it has no conclusion. We therefore reproduce only the transcript of the second.

Chiar^{mo} Signor Dottore Firenze 18/10/88

La ringrazio della gentile Sua lettera nella quale Ella prese in considerazione ciò che io Le scrissi ultimamente.

Mi permetta che io torni sopra al primo argomento da Lei considerato, quello cioé relativo alla questione dei punti di diramazione, sulla quale credo non andiamo d'accordo unicamente per il diverso significato che attribuiamo alle parole. Così, per esempio, mentre io chiamo i punti $z = 0$, e $z = \infty$ punti di diramazione della funzione $e^{1/\sqrt{z} + \sqrt{z}}$, perché girando intorno ad essi si scambiano i due valori della funzione, Ella non li ritiene tali, perché ammette che *nei punti di diramazione i valori sono determinati e soltanto avviene che alcuni di essi (valori) sono tra loro identici.* Se ho ben compreso il suo pensiero, ammettendo che in $z = 0$ vi sia come una *lacuna* nella funzione, Ella ne dedurrebbe che la precedente funzione polidroma sarebbe da considerarsi come una funzione polidroma senza punti di diramazione. Qualche cosa di analogo alle funzioni con spazii lacunari di cui Le scrissi nell'altra mia. Seguendo quindi un tal modo di vedere, mentre girando intorno al punto $z = 0$ si scambiano i valori della funzione $e^{1/\sqrt{z} + \sqrt{z}}$, e mentre la superficie di Riemann corrispondente alla detta funzione dovrebe essere *identica* all nota superficie di Riemann relativa a $\sqrt{z}$, pure il punto $z = 0$, che sarebbe un punto di diramazione per $\sqrt{z}$, non dovrebbe ritenersi tale per $e^{1/\sqrt{z} + \sqrt{z}}$.

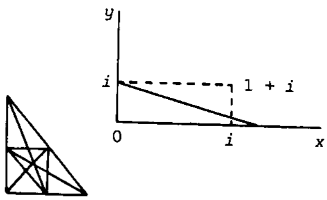
Così pure, per tornare all'esempio della mia precedente lettera, la funzione $\sqrt{sen(\pi/\sqrt{z})} + e^z$ non avrebbe né in $z = 0$, né in $z = \infty$ due punti di diramazione; i soli punti di diramazione sarebbero i punti $z = 1/n^2$ con n intero.

Ora la superficie di Riemann corrispondente a tale funzione avrebbe 4 fogli che distingueremo per semplicità con i numeri I, II, III, IV. [...] I fogli I e II si attaccano fra loro intorno ai punti $z = 1/n^2$. Così pure si attaccano fra loro negli stessi punti i fogli III e IV, però il passaggio da uno dei fogli I e II ad uno dei fogli III e IV non si può eseguire facendo un giro intorno a questi punti ed escludendo il punto 0, ma si eseguisce un tale passaggio, solo percorrendo un cammino chiuso nel cui interno giaccia il punto 0.

Se dunque ho ben compreso ciò che Ella mi scrive, sarebbe conveniente fare una distinzione fra i punti di diramazione analoghi a quelli delle funzioni algebriche, dove cioé la funzione prende un valore determinato, (sarebbero questi secondo Lei i veri e proprii punti di diramazione) e quei punti, (come il punto 0 per le funzioni sopra considerate) girando intorno ai quali avviene sì uno scambio nei valori della funzione, ma in essi la funzione non ha un valore determinato. Questi punti potrebbero quindi chiamarsi per intendersi dei *punti lacunari di diramazione*. Ove si facesse una tale distinzione si avrebbe però l'inconveniente che non apparirebbe nella superficie di Riemann corrispondente alla funzione stessa fra gli uni e gli altri. [...] Oltre a ciò sarebbero da considerare degli spazii lacunari veri e proprii che funzionerebbero da *spazii lacunari di diramazione* del genere di quelli che Le accennai nell'altra mia.

Prescindiamo per semplicità da questi spazii lacunari.

Relativamente allo scambiarsi dei valori della funzione i punti lacunari di diramazione si comportano in modo del tutto eguale ai veri e proprii punti di diramazione (ne è un esempio la funzione $e^{1/\sqrt{z} + \sqrt{z}}$ confrontata con $\sqrt{z}$). Oltre a ciò, la stessa funzione ne è un esempio possono esistere delle funzioni trascendenti prive dei veri e proprii punti di diramazione ed aventi soli punti lacunari di diramazione o certe funzioni tali che certi passaggi di fogli non possono eseguirsi altro che girando intorno a punti di questa specie (...). Mi sembra dunque che onde applicare la dimostrazione data nella Sua Noticina dovrebbe estendersi anche ai punti di diramazione lacunari, le proprietà che ivi enuncia pei punti che Ella considera come veri e proprii punti di diramazione. Ora è ciò possibile? E' certo che vi sono dei punti lacunari di diramazione. L'insieme dei punti di diramazione lacunari, o meno, può in ciascun foglio formare un insieme non isolato? Mi sembra che un tal caso non possa escludersi. Per esempio si immagini un insieme *numerabile*, *perfetto* e *non condensato* nell'intervallo 0 1 né in nessuna sua porzione e un certo modo di trasportare lo stesso insieme nell'intervallo i, $1 + i$. I punti dell'intervallo 0 1 potendo numerarsi potranno disporsi in una serie A_1 A_2 ... A_n ... e i corrispondenti di i, $1 + i$ in una serie B_1 B_2 ... B_n ....



Cominciamo dall'unire al foglio dato I un foglio II nei punti A_1B_1. *Poi uniamo un* foglio III al foglio I lungo A_2B_2, ed un foglio IV al foglio II pure lungo A_2B_2. Poi ai quattro fogli costruiti uniamone altri quattro, i fogli V, VI, VII, VIII lungo A_3B_3 e così procediamo indefinitamente. Otterremo in tal modo una superficie diramata ed ogni punto di diramazione della superficie in ogni foglio sarebbe punto limite di altri punti di diramazione della superficie stessa. Ora può escludersi a priori la esistenza di una funzione analitica corrispondente ad una tale funzione? Io non credo, quindi. [...]

5. *Letter from Vivanti to Volterra*

This is the reply to Volterra's letter to which the drafts of the previous No. 4 refer. It appears as No. 6 on the archive list.

Ch^{mo} Signor Professore Mantova 2/11/88

Avrei voluto scriverle molto prima d'ora, ma una triste circostanza mi tolse per alcuni giorni il tempo e la tranquillità necessaria per farlo; ed Ella vorrà quindi perdonarmi l'involontario ritardo. Anzitutto devo ringraziarla vivamente di aver voluto con squisita gentilezza inviarmi il manoscritto contenente le Sue ultime ricerche; lo leggerò con tutto il piacere, e glieli rispedirò a Pisa fra alcuni giorni.

Devo riconoscere che la mia asserzione, potersi sempre passare da uno ad un altro foglio di una riemanniana senza girare attorno ai punti di diramazione che Ella chiama lacunari, è insostenibile. Come Ella osserva giustamente, le funzioni aventi punti lacunari sono da considerarsi come funzioni a spazi lacunari infinitesimi. Nulla osta a che i punti lacunari contenuti in un foglio costituiscano un insieme non enumerabile; ma, se Ella riprende la dimostrazione tracciatale brevemente nell'altra mia per le funzioni a spazi lacunari, vedrà che tale dimostrazione può, se non erro, ripetersi per le funzioni a punti lacunari qualunque sia il loro numero.

Ancora un'osservazione. I punti lacunari di diramazione stanno rispetto ai punti ordinari di diramazione in un rapporto analogo a quello in cui stanno i punti singolari essenziali rispetto ai poli. E come il polo $z = \infty$ della funzione $f(z) = z$ diventa un punto singolare essenziale per la funzione $f(z) = e^z$, così il punto ordinario di diramazione $z = 0$ della funzione $f(z) = \sqrt{z}$ diviene un punto lacunare di diramazione per la funzione $f(z) = e^{1/\sqrt{z} + \sqrt{z}}$.

Sono desideroso di sapere se queste mie osservazioni Le sembrino giuste, o se possano dar luogo ad altre obiezioni.

La memoria di G. Cantor in cui sono esposti i principi della teoria dei tipi è composta di due parti, di cui la seconda è dedicata più specialmente a questa teoria (ed è quella che forma la base dello studio che sto per pubblicare), la prima invece versa sui principi generali filosofici su cui si fondano le teorie già note di Cantor. Di questa prima parte io ho, oltre ad un esemplare, le bozze di stampa mandatemi dall'autore prima ancora della pubblicazione, e mi permetto di inviarle a Lei, che potrà senz'altro tenerle. Vi unisco pure due brevi scritti dello stesso autore, che ho in duplicato.

Nel ripeterle i miei ringraziamenti mi pregio dichiararmi colla più distinta stima.

Di Lei dev^{mo}
G. Vivanti

6. *Letter from Vivanti to Volterra*
In this letter Vivanti acknowledges receipt of the manuscript of Volterra's work on many-valued analytic functions. It appears as No. 7 on the archive list.

Ch^{mo} Signor Professore Mantova 8 novembre 1888

Le restituisco, coi più sentiti ringraziamenti, il manoscritto che Ella ebbe la gentilezza d'inviarmi. Lo lessi col massimo interesse, e mi pare che i risultati da Lei ottenuti sieno veramente importanti e possano aprire la via a nuove ricerche sopra una classe di funzioni sinora dimenticata. Mi piacque specialmente la dimostrazione del teorema I (o del corollario I), perché trovo che essa mette in chiaro *la vera ragione* per cui una funzione analitica monogena non può prendere se non un insieme enumerabile di valori in ogni punto. Tale ragione consiste nella seguente proprietà delle funzioni analitiche, che risulta dalle di Lei ricerche:

Sieno A, B due punti del piano complesso a cui corrispondono valori della funzione, e si parta da A con un determinato valore della funzione; si otterranno tutti i valori di essa in B (eventualmente ripetuti più volte) percorrendo tutte le possibili linee AB. Ora la proprietà a cui alludo è questa, che ad una linea *finita* AB si può sempre sostituire una successione d'un numero finito di punti razionali. Ciò stabilito, la dimostrazione del teorema I segue spontanea. Le successioni della natura testé specificata costituiscono, come i punti razionali stessi, un insieme enumerabile, quindi lo stesso avrà luogo pei valori della funzione in B.

Scrivendo queste linee, mi si presenta alla mente un'osservazione colla quale mi permetto di chiederle qualche schiarimento: E' sufficiente considerare solo le linee AB di lunghezza finita o non si deve piuttosto anche tener conto di quelle aventi lunghezza infinitamente grande?

Il teor. III mi pare una conseguenza immediata del teor. IV; infatti, poiché i punti regolari di diramazione costituiscono un insieme di 1^a classe e i punti d'ogni area continua costituiscono un insieme di 2^a classe, ne segue che in ogni area, in cui si può prolungare la funzione, esistono punti cui non corrisponde alcun dominio di diramazione; e si può anche aggiungere che tali punti costituiscono un insieme di 2^a classe. Un altro punto di vista che potrebbe condurre ad una nuova dimostrazione del cor. I mi pare sia il seguente: Il campo d'esistenza d'una funzione analitica è un'area connessa; ora se quest'area passasse un numero non enumerabile di volte sopra uno stesso punto A, potrebbe determinarsi (il che ritengo si possa dimostrare rigorosamente) un punto B, che potrebbe essere anche il punto A stesso, avente la stessa proprietà del punto A, e tale che tutti i suoi intorni giacessero nel campo di esistenza della funzione. Si cadrebbe così nell'assurdo di un'area contenente un insieme non enumerabile di aree parziali.

La prego di perdonare queste mie osservazioni, e ringraziandola nuovamente mi dichiaro colla più distinta stima.

Suo dev^{mo}
G. Vivanti

7. *Draft of a Letter from Volterra to Vivanti*

This is an incomplete draft written in pen with many cancelations and corrections (included here in the transcript). It appears as No. 8 on the archive list.

Chiar^{mo} Signor Dottore Pisa 9/11/88

Mi affretto ad accusare ricevuta del manoscritto con acclusavi la Sua lettera. E' giusto ciò che Ella mi scrive relativamente alla dipendenza del teorema III dal teorema IV.

Ho considerato solo le linee AB di lunghezza finita per la ragione seguente: Due elementi f_1 e f_2 si dicono appartenere ad una stessa funzione analitica, se dall'uno si può ottenere l'altro mediante prolungamento, cioè se esiste un sistema finito di elementi di cui l'uno sia prolungamento dell'altro essendo f_1 il primo ed f_2 l'ultimo del sistema. Ora se F_1 e F_2 sono due porzioni monodrome della funzione relative a due punti A e B dovranno esistere due elementi f_1 e f_2 rispettivamente appartenenti alle due porzioni monodrome della funzione [...] quindi potrà tracciarsi una linea di lunghezza finita che da A vada in B e sia tale che percorrendola a partire da A colla porzione F_1 mediante prolungamenti si giunga in B colla porzione F_2. Poiché vedo che il parlare delle linee AB di lunghezza finita può non riuscire del tutto chiaro a prima vista, così modificherò alquanto il punto ove se ne parla. [...]

8. *Letter from Vivanti to Volterra*

This is evidently a reply to the letter to which the previous draft refers. It appears as No. 9 on the archive list.

Ch^{mo} Signor Professore Mantova 15.11.88

Trovo giustissimo quanto Ella mi scrive in risposta alla mia osservazione; mi pare tuttavia che, per evitare ogni malinteso, Ella farà bene sostituendo alla curva la successione di punti. Sarebbe poi secondo me desiderabile che Ella si decidesse a pubblicare le sue ricerche, le quali sarebbero certo accolte con molto interesse dal pubblico matematico.

Le accennai di volo nell'ultima mia ad un'altra via per la quale mi pare potrebbe giungersi alla dimostrazione del Suo corollario I. Eccole un po' più dettagliatamente la mia idea. Un insieme infinito qualunque può porsi in infiniti modi sotto forma d'un *insieme ben ordinato*, cioè avente un primo elemento e tale che ad ogni elemento ne succeda un altro ben determinato (V. Cantor. Grundlagen etc §§2,3). Consideriamo l'insieme di tutti i valori *differenti* che prende una funzione analitica in un punto A del piano complesso; questo insieme può certamente porsi, almeno in un modo, sotto forma di un insieme ben ordinato (od almeno avente la 2^a proprietà degli insiemi ben ordinati) tale che la differenza tra un elemento ed il successivo abbia valore finito qualunque sia l'elemento che si considera. Infatti se ciò non fosse i valori considerati non sarebbero tutti differenti fra loro. Sieno adunque y ed y' due valori consecutivi della funzione nel punto A. Esisterà un intorno finito P del punto analitico (A, y), ed un intorno pure finito P' del punto analitico (A, y'), tali che essi siano esterni l'uno all'altro, cioè che non s'abbia alcun punto analitico ad essi comune. Supposto P' determinato in modo che esista un analogo intorno P'' del punto analitico (A, y'') (dove y'' è il valore successivo ad y') ad esso esterno, ed imaginando il campo di validità C della funzione analitica generato in modo che essa prenda nel punto A i vari valori nell'ordine in cui sono stati disposti, si avrà così corrispondentemente all'insieme dei valori della funzione un insieme di aree P tutte esterne l'una all'altra e giacenti nel campo C. Ma questo insieme è, come si sa, enumerabile, quindi tale deve essere pure l'insieme dei valori diversi che prende la funzione nel punto A. Io non ho abbastanza riflettuto su questa dimostrazione per convincermi che essa sia veramente rigorosa; forse non lo è ma può ridursi tale con qualche modificazione. Ad ogni modo mi sarà gradito sapere che cosa Ella ne pensi.

Accolga intanto, Egregio Signor Professore, i più distinti saluti dal

Suo devotissimo
G. Vivanti

9. *Postcard from Vivanti to Volterra*
This appears as No. 10 on the archive list.

Ch^{mo} Sig Professore Mantova 18.11.88

Ho ricevuto jeri dal D^{r} Guccia una breve Nota di Poincaré presentata al Circolo Matematico, in cui viene dimostrato un Suo corollario I con un metodo che in sostanza mi pare identico a quello da Lei seguito. Credo opportuno farla avvertita di ciò; ed anzi se Ella volesse leggere la Nota di Poincaré, io potrei inviargliela.

Accolga i più distinti saluti dal

Suo Dev^{mo}
G. Vivanti

10. *Draft of a Letter from Volterra to Vivanti*
This is a draft written in pen with cancelations and corrections. It appears as No. 11 on the archive list.

Chiar^{mo} Signor Dottore Pisa 21/11/88

Le sono gratissimo della Sua cartolina ove mi annunzia che il Poincaré ha presentato una Nota colla dimostrazione del Corollario I.

Io ho inviato ieri all'Accademia la mia dimostrazione modificata nel senso che Le dissi per evitare dei dubbii relativamente alla questione del cammino ℓ di lunghezza finita o meno e sostituendovi una successione di elementi uno prolungamento dell'altro. Ho poi pensato di dividere il teorema I in due parti.

Chiamando *punto analitico* un punto in quanto appartiene ad un certo dominio di monodromia e considerando come distinti due punti analitici anche coincidenti, purché appartenenti o contenuti in due dominii di monodromia diversi e non prolungamento uno dell'altro, la dimostrazione del teorema I dava contemporaneamente anche la dimostrazione del teorema: *Che tutti i punti analitici di una funzione analitica sono contenuti entro un insieme enumerabile di dominii di monodromia.*

Ho enunciato esplicitamente questo teorema preponendolo al I teorema del manoscritto che Le inviai. Ho poi riunito insieme e formato un unico teorema dei teoremi II e IV. Nell'ultima mia lettera Le feci cenno che avevo tentato di fare un'applicazione delle dette ricerche. Spero di poter giungere, valendomi delle dette considerazioni a dimostrare il teorema del Poincaré: *data una funzione $y(x)$ analitica non uniforme, si può trovare una variabile z di cui x, ed y sono funzioni uniformi.* La dimostrazione del Poincaré pubblicata nel Bull. de la Soc. Mat. mi sembra possa lasciare qualche dubbio, sia per l'impiego in essa fatto delle superficie di Riemann, sia perché ci si può chiedere, se facendo allargare il contorno C come fa il Poincaré si verranno a prendere tutti i punti analitici della funzione.

Poiché pel teorema sopra citato sembra che l'insieme di tutti i punti analitici di una funzione, è contenuto in un insieme enumerabile di dominii di monodromia, che possono sempre ottenersi [...] la questione posta dal Poincaré si ridurrà a rappresentare conformemente un'area formata da un insieme enumerabile di campi in un mezzo piano. Questa questione si presenta come una questione limite del noto problema di Schwarz di rappresentare uno spazio compreso da un numero finito di campi in un mezzo piano. Come in questo caso la questione dipende dalla integrazione di una equazione differenziale (*) $d^2\vartheta/dz^2 = F(z)$ ove il secondo membro è una funzione razionale i cui poli giacciono sull'asse reale, così il caso limite dipenderà dalla integrazione della equazione (*). [...]

Senza che Ella si disturbi ad inviarmi il manoscritto del Poincaré che il Dr. Guccia Le ha mandato, mi basta di sapere se nella detta Nota il Poincaré fa menzione di una applicazione del teorema alla questione che Le ho ora accennato.

11. *Postcard from Vivanti to Volterra*
This is a reply to the previous letter under No. 11. It appears as No. 12 on the archive list.

Ch^{mo} Sig Professore Mantova 21.11.88

Rispondo subito alla sua lettera di jeri.

La nota di P., che occupa poco più di 2 pagine, si limita alla dimostrazione del teorema che ogni funzione analitica (monogena) prende in ciascun punto un insieme enumerabile di valori; e lo fa mediante la considerazione che basta occuparsi di cerchi aventi il centro in punti razionali.

La questione di cui Ella si occupa mi sembra molto importante, e mi auguro che le Sue ricerche abbiano buon esito. La ringrazio intanto dei particolari che mi dà in proposito, e La prego di gradire i miei più distinti saluti.

Suo dev^{mo}
G. Vivanti

12. Postcard from Vivanti to Volterra

This was sent from Mantova on 12.12.1888 and acknowledges receipt of a letter from Volterra of which there is no draft. Vivanti probably alludes to the demonstration contained in letter No. 8 and says that he has not had time to become convinced of its exactitude. It appears as No. 13 on the archive list.

Ch^{mo} Sig. Professore Mantova 12.12.1888

La ringrazio assai della gentilissima Sua lettera. Come già Le scrissi, non ho riflettuto abbastanza sulla dimostrazione di cui Le diedi un cenno per potermi convincere della sua esattezza, e dopo non me ne sono più occupato; sicché non potrei ora rispondere alla di Lei osservazioni. Lo farò forse un'altra volta.

Gradisca intanto i miei più distinti saluti e mi creda.

Suo dev^{mo}
G. Vivanti

APPENDIX C: A MANUSCRIPT BY VOLTERRA

In box No. 4 of the manuscripts conserved in the Volterra archives at the Accademia Nazionale dei Lincei [see Israel 1982] for the period 1886-1890, there is a file entitled: "Sulle funzioni analitiche monodrome--Sulle funzioni analitiche polidrome-1888". This file contains, in the following order: (1) a draft of a memoir on many-valued analytic functions and various sheets with many calculations, some of which deal with a different subject; (2) eight sheets containing part of the first draft of the memoir; (3) a complete version of the memoir; (4) a block of sheets in disorder which include drafts of demonstrations, calculations, notes, and arguments of a different nature (considerations on the concept of functional, questions concerning abelian integrals, etc.).

Parts (1), (2), and (4) are too fragmentary. Part (3), on the other hand, represents the first integral version of the memoir and precisely the one that Volterra sent to Vivanti (see letters 6-10 of Appendix B). This version is especially interesting because it contains an introduction which was later suppressed in the published text. Another passage was suppressed in the printed version, as were the demonstrations of statements (1), (2), and (3).

Moreover, the order of the theorems and of the demonstrations that appear here was modified following Vivanti's suggestions. In letter No. 6 (see Appendix B), Vivanti had offered Volterra two suggestions: in the first place, he observed that the "finite curve" used by Volterra in the demonstration of Theorem I can be substituted by the consideration of a finite sequence of rational points; in the second place, he noted that Theorem III is an immediate consequence of Theorem IV. In his reply (No. 7 of Appendix B) Volterra substantially accepted both of Vivanti's observations. Finally, in letter No. 10 (in reply to Vivanti's letters Nos. 8 and 9), Volterra acknowledged that he had made the following modifications: (a) in the demonstration of Theorem I, he substituted the finite curve with a sequence of elements which are the analytic continuations of each other; (b) he introduced the definition of "analytic point" and, as a result of this, Theorem I is divided into two parts; (c) he combined Theorems II and IV.

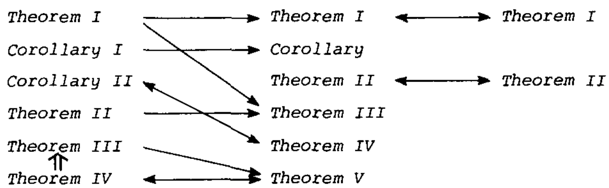
We may observe, in this regard, that modification (a) is just the one which corresponds to the note in the margin of the manuscript (included in the transcript between the symbols [+]), and conforms with the published text. The modification (b) also corresponds to the note in the margin of the manuscript (included in our transcript between the symbols [‡] and [∘]). As regards point (c), it may be observed that Theorems II and IV mentioned in letter No. 10 do not correspond to the initial numeration of the theorems in the manuscript.

However, through the introduction of the definition of "analytic point," Theorems I and II in the early version merge as Theorem III in the printed version. It is therefore probable that Volterra was referring to these two theorems, the numbering of which may have been modified following introduction of the new Theorem I. In support of this *hypothesis, it may be observed that Theorem IV of the manuscript was maintained unaltered in the published text.*

It should also be noted that the variant in the enunciation of Theorem II (between symbols [°°] *in the following text) coincides with the definitive version; and finally, that the modifications made in the demonstration of Theorem I in the definitive text do not appear in the manuscript.*

We reproduce below a scheme of the connections between the various statements of theorems in the different versions of the article. The simple arrow ⟶ *indicates the inclusion of one statement or version in another, while the double arrow* ⟷ *indicates equivalence. The symbol* ⟹ *indicates logical implication.*

Manuscript version *Definitive published version* *Variants in the margin of the manuscript*



Those parts of the manuscript that were suppressed in the published version are included, in our transcript here, between symbols [S].

Prof. Vito Volterra (stamped)
PISA
Sulle funzioni analitiche polidrome

[S] In una Nota recentemente pubblicata il Dr. Vivanti enuncia il seguente teorema comunicatogli dal Sig. Cantor: *Qualunque funzione analitica monogena* (nel senso dato a questa parola da Weierstrass) *prende per ogni valore della variabile un insieme enumerabile di valori.*

La dimostrazione che ne dà il Dr. Vivanti è molto semplice, ma mi pare che essa si fondi su considerazioni che possono porre delle restrizioni alla generalità dell'enunciato. Infatti nella detta dimostrazione si parte dal supporre già costruita una superficie di Riemann corrispondente alla funzione analitica che si considera, si esclude la esistenza di spazii lacunari, giacché si ammette che a più fogli che si attaccano fra loro debbano corrispondere sempre dei punti di diramazione(*) e finalmente si ammette che i punti di diramazione formino un insieme isolato, donde si conclude che essi debbono formare un insieme enumerabile.(**)

Esaminiamo qual cammino si segue per costruire le superficie di Riemann relative alle funzioni algebriche. Si comincia dal supporre in certo modo distesi sul piano complesso tutti i valori della funzione algebrica, quindi si procede alla ricerca dei punti di diramazione, ed è poi cercando di attaccare fra loro i valori con continuità che si giunge ad ottenere i fogli della superficie di Riemann. Queste operazioni così semplici nel caso delle funzioni algebriche non possono in via immediata estendersi alle funzioni analitiche più generali, per le quali, a priori, nulla si sa intorno alla enumerabilità dei loro valori, e per le quali non può escludersi il caso che i punti di diramazione siano condensati in dati campi. Mi sembra dunque che non sia rigoroso l'ammettere a priori la esistenza delle superficie di Riemann per tutte le funzioni analitiche e che si incorrerebbe in gravi difficoltà se, per esaminare il caso più generale delle funzioni analitiche, si volesse partire da considerazioni del tutto analoghe a quelle ideate da Riemann per le funzioni algebriche.

(*) Ciò potrebbe non accadere se esistessero gli spazii lacunari suddetti.

(**) Se, intendiamo per punto di diramazione un punto tale che sia possibile determinare in intorni tanto piccoli di esso quanto si vuole, dei cammini chiusi percorrendo i quali i valori della funzione si permutano, mi sembra che, nel caso più generale delle funzioni analitiche, non possa escludersi la esistenza di punti di diramazione non isolati, ed anche non so se possa dimostrarsi che i detti punti non possano formare un insieme non enumerabile.

Mi permetto perciò di presentare alcune considerazioni sulle funzioni analitiche polidrome, dalle quali resulterà il teorema citato di Cantor, applicando i metodi dell'illustre Weierstrass. [S]

Alle parole, *funzione analitica*, comportarsi *regolarmente di una funzione nell'intorno di un punto, elemento di una funzione, valore di una funzione in un punto, singolarità*, darò il significato che, seguendo Weierstrass, viene ormai dato a quelle denominazioni in tutti i corsi di analisi. (*)

Mi permetto però di dare alcune altre definizioni che serviranno per i teoremi che enuncierò in seguito.

Abbiasi una funzione analitica $f(z)$, ottenuta prolungando col metodo di Weierstrass un elemento dato *senza mai escire da un cerchio* σ. Entro questo cerchio possano esistere un numero finito o anche infinito di singolarità essenziali o non essenziali. Faremo solo due ipotesi; la prima che chiameremo la ipotesi (A), ossia la ipotesi di *monodromia entro* σ, è la seguente: *che ad uno stesso punto non possa corrispondere più che un solo elemento.*

La seconda ipotesi, che chiameremo la ipotesi (B), ossia la ipotesi dell'*assenza di spazii lacunari entro* σ, è la seguente: *che preso entro* σ *un nuovo campo qualunque* σ', *entro di esso possa sempre trovarsi un elemento della funzione.*

[+] Ammettiamo pure noto come una funzione analitica sia completamente definita quando se ne conosce un elemento, $p(x/a)$ (1) che ogni altro elemento se ne otterrà mediante prolungamento, cioé preso un punto a_1 nel campo di convergenza della serie (1) formando l'elemento $P(x/a,a_1)$ quindi prendendo un punto a_2 nel cerchio di convergenza della serie (a), formando l'elemento $P(x/a,a_1,a_2)$, in modo che, riterremo per definizione che due elementi P Q appartengono ad una stessa funzione analitica, quando è possibile costruire una serie di elementi

$$\omega_1(x/a_1) = P, \quad \omega_2(x/a_1,a_2) \quad \ldots, \quad \omega_n(x/a_1\ldots a_n) = Q$$

tali che il centro di ciascun cerchio giaccia nell'interno del precedente e ciascun elemento sia il prolungamento del precedente. [+]

Ingrandiamo ora il cerchio σ finché è possibile in modo che entro esso $f(z)$ goda sempre delle proprietà (A) e (B). Chiameremo la funzione così ottenuta entro il cerchio massimo una *porzione monodroma della funzione* $f(z)$ e il cerchio stesso il *dominio di monodromia* del suo centro M relativamente a quella porzione monodroma della funzione. Il punto M potrà essere un punto singolare o meno. E' evidente che, presa una funzione analitica qualunque e prolungandola finché è possibile nel piano complesso potrà avvenire che uno stesso punto appartenga a più porzioni monodrome distinte della funzione. Ad uno stesso punto potranno quindi corrispondere più dominii di monodromia a seconda delle porzioni monodrome delle funzioni a cui si riferiscono. Considereremo come distinti due dominii di monodromia, anche se consistenti in due cerchi coincidenti, quando essi corrispondono a due porzioni monodrome diverse della funzione.

[S] Dato un dominio di monodromia α di un punto M, se potremo determinare un dominio di monodromia α_1 di un altro punto M_1, tale che i due cerchi α ed α_1 si taglino e le due porzioni monodrome della funzione relative ai due dominii siano eguali nella parte comune di esse,(**) diremo che *il dominio* α_1 *è un prolungamento del dominio* α. Se il punto M_1 giace nell'interno di α, è evidente che potremo sempre determinare un dominio di M_1 che sia ottenuto prolungando il dominio α. [S]

[‡] Abbiasi un dominio di monodromia oppure un dominio di diramazione e consideriamone il centro. Questo punto in quanto è centro di quel dato dominio di monodromia oppure di diramazione lo chiameremo un punto analitico. Consideriamo due punti analitici [...] Quindi in uno stesso punto potranno coincidere più punti analitici e precisamente tanti quanti sono i dominii di monodromia e di diramazione corrispondenti a quel punto.

Se un punto analitico corrispondente ad un dominio di monodromia [...] diremo che in quel punto analitico la funzione si comporta in modo monodromo, altrimenti [...]

(*) Faccio notare che nel Corollario I al teorema I (vedi in seguito) io considero solo i valori delle funzioni analitiche nei punti nei cui intorni esse si comportano regolarmente.

(**) Per ciò basterà che in questa parte esista un elemento a comune per le due porzioni monodrome della funzione.

Sia il punto analitico M centro del corrispondente dominio di monodromia α ed il dominio α_1 (nel cui interno giaccia M) un prolungamento del dominio α, diremo che il punto analitico M è contenuto nel dominio α_1. [‡]

Partendo da un elemento, supponiamo di estendere finché è possibile una funzione analitica *senza mai escire da un cerchio* σ. Ammettiamo che, escluso il solo centro M di σ, al quale non corrisponda alcun dominio di monodromia, ad ogni altro punto corrisponda uno o più dominii di monodromia i quali, o taglino il contorno del campo σ, o passino pel punto M. Diremo in questo caso che è verificata la proprietà (C). Ingrandiamo ora il cerchio mantenendo il centro in M, finché è possibile, in modo che in esso la proprietà (C) sia sempre verificata. Chiameremo il punto M un *punto regolare di diramazione*, e la funzione ottenuta entro il cerchio massimo costruito una *porzione di diramazione della funzione*. Giova anche qui fare osservazione analoga a quella fatta precedentemente, cioé che riterremo come distinti due dominii di diramazione, anche se costituiti da due cerchi coincidenti, se essi corrispondono a due diverse *porzioni di diramazione della funzione*. Così pure riterremo come distinti due punti regolari di diramazione anche se *coincidenti*, se i loro corrispondenti dominii di diramazione saranno da ritenersi come distinti.

Abbiasi un dominio di monodromia α, ed un dominio di diramazione β che posseggono una parte di piano a comune, ed in questa la porzione monodroma della funzione corrispondente ad α abbia un elemento a comune colla porzione di diramazione corrispondente a β; diremo in questo caso che β è un prolungamento di α.

Supponiamo di eseguire la estensione della funzione, senza escire dall'interno di un cerchio σ (situato entro il dominio di diramazione, avente il raggio r tanto piccolo quanto si vuole, ed il centro nel punto M di diramazione) partendo da un elemento della porzione di diramazione della funzione relativo ad un punto situato entro σ.

E' facile dimostrare

1°) *che ad ogni punto del cerchio σ devono corrispondere più dominii di monodromia.*

2°) *che se ad un punto del cerchio σ corrisponde un numero finito m di dominii di monodromia, ad ogni altro punto del cerchio stesso devono corrispondere un egual numero di dominii di monodromia, e se ad un punto del dominio di diramazione corrisponde un numero infinito di dominii di monodromia, pure lo stesso deve avvenire per tutti gli altri punti del dominio di diramazione.*

3°) *che il numero m (anche per $m = \infty$) per uno stesso dominio di diramazione è indipendente dal cerchio σ.*

[S]Infatti,

1°) se ad ogni punto di σ corrispondesse un solo dominio di monodromia, sarebbe possibile estendere la funzione senza mai escire da σ in modo che fossero soddisfatte le proprietà (A) e (B), dunque anche M possiederebbe un dominio di monodromia contro la ipotesi fatta.

2°) siano P_1 e P_2 due punti interni a σ, supponendo $P_1M > P_2M$, si potrà andare da P_1 a P_2 descrivendo prima una porzione P_1R del raggio P_1M di lunghezza eguale a $P_1M - P_2M$, e poi l'arco di cerchio RP_2 col centro in M. Sia α_1 un dominio di monodromia di P_1; percorrendo i punti della linea costruita P_1RP_2 prolunghiamo il dominio α_1 ed i dominii che successivamente si ottengono. Avremo in tal modo dei dominii i cui raggi saranno non inferiori alla più piccola delle lunghezze $r - MP_1$, MP_2; quindi percorrendo la linea P_1RP_2 nel modo indicato dovremo giungere in P_2 con un dominio di monodromia α_2. Ora partendo da un altro dominio β_1 di P_1 distinto da α_1 ed eseguendo le stesse operazioni sopra indicate, dovremo giungere in P_2 con un dominio di monodromia β_2 distinto da α_2. Quindi i dominii di monodromia di due punti qualunque P_1 e P_2 interni a σ si debbono corrispondere univocamente.

3°) Se la terza proposizione non fosse vera dovrebbe trovarsi uno dei cerchi σ, che chiameremo σ_1 a cui corrisponderebbe un numero m_1; e σ_1 dovrebbe esser tale che il numero m_2 corrispondente ad ogni altro cerchio $\sigma_2 > \sigma_1$ fosse maggiore di m_1. Ora ciò è impossibile, perché se la differenza fra i raggi di σ_1 e σ_2 è minore della differenza fra il raggio di σ_2 e quello del dominio di diramazione, tutti i dominii di monodromia corrispondenti ai punti di σ_2 dovranno penetrare nell'interno di σ_1. [S]

Ciò premesso ecco quali sono i teoremi che mi propongo di dimostrare.

TEOREMA I. *Presa una funzione analitica qualunque, e supponendo di prolungarla col metodo di Weierstrass finché è possibile nel piano complesso, ad un stesso punto corrisponderà o nessuno, oppure un insieme numerabile di dominii di monodromia.*

COROLLARIO I. *Ad uno stesso punto del piano complesso corrisponde o nessuno, o un insieme numerabile di valori della funzione.*

COROLLARIO II. *In ogni parte del piano complesso, entro la quale è possibile estendere la funzione, esistono dei punti nei cui intorni tutte le porzioni monodrome della funzione relative a quel punto si comportano regolarmente.*
TEOREMA II. *Ad uno stesso punto del piano complesso corrisponde o nessuno, oppure un insieme numerabile di dominii di diramazione.*
TEOREMA III. *In ogni porzione del piano complesso, entro la quale è possibile prolungare la funzione analitica, esistono dei punti a cui non corrisponde alcun dominio di diramazione.*
TEOREMA IV. *I punti regolari di diramazione formano un insieme enumerabile.*

[∘]Teorema I. Presa una funzione analitica qualunque si può sempre scegliere un insieme enumerabile di dominii di monodromia fra loro connessi, tali che essi contengano internamente tutti i punti analitici in cui la funzione si comporta in modo monodromo e [... ?] al contorno tutti i punti regolari di diramazione. [∘]

[$\overset{\circ}{\circ}$]Teorema II. Si può scegliere un insieme enumerabile di cerchi di convergenza fra loro connessi, tali che essi contengano ogni punto analitico in cui la funzione si comporta regolarmente. [$\overset{\circ}{\circ}$]

Onde dimostrare i teoremi precendenti cominceremo dallo stabilire un lemma. Partiamo da una porzione monodroma di una funzione analitica $f(z)$ relativa al dominio di monodromia α di un punto A. Prendiamo i dominii di monodromia di tutti i *punti razionali* (*) interni ad α ottenuti prolungando il dominio α. Avremo così un insieme di cerchii che chiameremo i cerchi α_1. Presi i punti razionali interni ai cerchi α_1, costruiamo i loro dominii di monodromia ottenuti prolungando i dominii α_1. Avremo un insieme di nuovi dominii α_2. Operando su questi, come sui dominii α_1, otterremo dei nuovi dominii α_3, e così di seguito indefinitamente.

Il lemma da dimostrare è il seguente.

L'insieme di tutti i dominii di monodromia $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots, \alpha_n \ldots$, *è un insieme numerabile.*

Infatti, come è ben noto, i punti razionali interni ad α formeranno un insieme numerabile, quindi potremo enumerare tutti i dominii α_1 disponendoli in una serie come la seguente $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^n, \ldots$.

Ora i punti razionali contenuti entro α_1^n formano un insieme numerabile, e per conseguenza potremo prendere tutti questi punti disponendoli nell'ordine seguente

$$P_1^{n,1}, \quad P_1^{n,2}, \quad \ldots, \quad P_1^{n,m} \ldots.$$

Consideriamo tutti i possibili punti $P_1^{n,m}$. Ad uno stesso valore della somma $m + n$ corrisponde un numero finito di punti $P_1^{n,m}$, quindi potremo ordinare i punti stessi per ordine di grandezza della somma $m + n$. I punti $P_1^{n,m}$ e per conseguenza i dominii α_2 formeranno un insieme numerabile. Nello stesso modo si ha che i dominii α_3 formeranno un insieme numerabile, e così di seguito indefinitamente. In generale tutti i dominii α_n si potranno disporre in una serie

$$\alpha_n^1, \alpha_n^2, \ldots, \alpha_n^m, \ldots.$$

Prendiamo ora tutti i dominii α_n^m, e ordiniamoli per ordine di grandezza della somma $m + n$; in tal modo potremo enumerare tutti i dominii costruiti; solamente avremo che uno stesso dominio potrà essere contato più volte, perché è evidente che un dominio che appartiene agli α_n è ripetuto anche nei dominii $\alpha_{n'}$, se $n' > n$. Ma si vede immediatamente che, se percorrendo l'intera serie di dominii, così enumerati, si toglieranno man mano quelli che si saranno precedentemente in contrati si otterrano enumerati tutti i dominii e ciascuno di essi verrà contato una volta sola.

Il lemma resta così dimostrato.

(*) Chiameremo *punto razionale* un punto $z = x + iy$ del piano complesso, quando x ed y saranno dei numeri razionali.

Dimostrazione del teorema I. Sia α un dominio di monodromia del punto A relativamente alla funzione analitica $f(z)$, e supponiamo quindi costruiti tutti i sistemi di dominii α_1, α_2, ... Descriviamo una curva ℓ di *lunghezza finita* che, partendo da A giunga ad un punto B (che possa anche essere il punto A stesso). Percorrendo i punti della linea ℓ a partire da A prolunghiamo il dominio α ed i dominii che successivamente si ottengono. Escludiamo il caso che, operando in tal modo, non si possa eseguire il prolungamento al di là di un certo punto della linea ℓ e ammettiamo di giungere così in B con un dominio di monodromia σ. Vogliamo dimostrare che l'insieme di tali dominii di monodromia con i quali si può giungere in B percorrendo tutte le possibili linee che godono delle precedenti proprietà, è numerabile. A tal fine denotiamo con A_1 il primo punto in cui la linea ℓ taglia il contorno del circolo α, supponendo di percorrere ℓ a partire da A. Per la ipotesi fatta dovrà esistere un dominio di monodromia σ_1 di A_1, che sia un prolungamento del dominio α. Esso sarà un cerchio di raggio r_1 e che avrà una porzione di piano a comune con α. In questa porzione di piano potremo prendere un punto razionale vicino ad A_1 tanto quanto si vuole, quindi in particolare distante da A_1 meno di $r_1/3$. Se costruiamo il dominio di monodromia di questo punto prolungando il dominio α, otterremo uno dei dominii α_1, che denoteremo con α_1^*, il cui raggio dovrà essere maggiore di $2r_1/3$ e che dovrà quindi avere nel suo interno il punto A_1. E' poi evidente che α_1^* sarà un prolungamento del dominio σ_1.

Sia A_2 il primo punto, a partire da A_1, dove la linea ℓ incontra il contorno di α_1^*. La distanza fra A_1 e A_2 dovrà superare $r_1/3$. Il dominio di A_2 ottenuto prolungando σ_1 sarà un dominio σ_2 di raggio r_2 e che sarà pure un prolungamento di α_1^*. Nella porzione di piano comune ai due cerchi σ_2 e α_1^* potremo prendere un punto razionale distante da A_2 meno di $r_2/3$ e formare il dominio di monodromia di questo punto prolungando α_1^*. Otterremo in tal modo uno dei cerchi α_2 che denoteremo con α_2^* e che sarà un prolungamento di σ_2 e avrà nel suo interno il punto A_2. Supponiamo di operare su α_2^* come fu fatto precedentemente su α_1^*, e così proseguire di seguito.

Dico che dopo un numero finito di tali operazioni dovremo giungere a trovare un dominio di monodromia α_p^* nel cui interno deve giacere il punto B. Infatti, se ciò non fosse, si dovrebbero trovare lungo la linea ℓ un numero infinito dei punti A_1, A_2, A_3, ..., A_n ... e questi, poiché la linea ℓ è di lunghezza finita dovrebbero avere un punto limite L (che potrebbe anche essere il punto B stesso). Ma, da ciò che abbiamo detto sopra, resulta che i raggi dei dominii di monodromia dei punti A_1, A_2, ..., A_n ... dovrebbero andare decrescendo indefinitamente. Ora si vede facilmente che ciò è impossibile, perché nel percorrere la linea ℓ nel modo detto si debbono sempre incontrare dei punti (il punto B inclusivamente) a cui corrispondono dei dominii di monodromia che sono prolungamenti successivi gli uni degli altri. Al punto limite L dovrebbe dunque corrispondere uno di tali dominii di monodromia. Ora dal momento che con i punti A_n fossimo penetrati entro un tale dominio, i dominii corrispondenti dei punti A_n stessi non potrebbero più andare diminuendo indefinitamente.

Resulta dunque che si giungerà lungo ℓ in B dopo aver costruito un numero finito di dominii α, α_1^*, α_2^*, ..., α_p^*; la linea ℓ giacerà interamente nello spazio occupato dai detti cerchi, e l'ultimo di essi α_p^* conterrà nel suo interno il punto B, e σ potrà ritenersi come un prolungamento di α_p^* stesso. Ne segue che il dominio di monodromia σ corrispondente al punto B, che si ottiene dopo percorsa la linea ℓ, dipende soltanto dal dominio α_p^*; quindi per il lemma dimostrato i dominii di monodromia σ corrispondenti ad uno stesso punto B dovranno costituire un insieme numerabile.

Dimostrazione del Corollario I. Ad ogni valore della funzione in un punto deve corrispondere un elemento della funzione ed ogni elemento deve appartenere ad una porzione monodroma della funzione, quindi ad ogni valore della funzione in un punto deve corrispondere un dominio di monodromia in quel punto. Poiché questi formano un insieme numerabile, così anche i valori della funzione nel punto dovranno formare un insieme numerabile.

Dimostrazione del Corollario II. Poiché l'insieme dei dominii α, α_1, α_2, ..., è numerabile potremo ordinarli (prendendo ciascuno una volta sola) in una serie

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \alpha''',\ \ldots,\ \alpha^{(p)}\ \ldots. \tag{I}$$

Denotiamo con $f^{(k)}$ la porzione monodroma della funzione analitica che si considera corrispondente al dominio $\alpha^{(p)}$.

Sia ϑ una parte del piano complesso entro la quale è possibile estendere la funzione analitica, e sia $\alpha^{(i)}$ il primo dominio della serie (I) entro cui giacciano dei punti interni al campo ϑ. Prendiamo (il che sarà sempre possibile) un cerchio ϑ'

situato internamente alla parte comune ad $\alpha^{(i)}$ ed a ϑ, tale che in tutti i punti di essa $f^{(i)}$ si comporti regolarmente. Sia $\alpha^{(i')}$ il primo cerchio della serie (I) dopo $\alpha^{(i)}$ che abbia una parte a comune con ϑ' e dentro di essa prendiamo un cerchio ϑ'' nel cui interno $f^{(i')}$ si comporti regolarmente e cosi si proceda indefinitamente.

In tal modo avremo che si prenderà dalla serie (I) una serie di dominii

$$\text{(II)} \qquad \alpha^{(i)}, \alpha^{(i')}, \alpha^{(i'')}, \ldots$$

e che corrispondentemente otterremo una serie di cerchi ϑ', ϑ'', ϑ''' .... situati tutti internamente l'uno all'altro. Dovrà dunque esistere almeno un punto M interno a tutti i cerchi $\vartheta^{(q)}$ e quindi interno al campo ϑ. Dico che nel punto M tutte le corrispondenti porzioni monodrome della funzione analitica che si considera si comportano regolarmente. Prendiamo infatti uno qualunque dei dominii σ di monodromia di M, in seguito a ciò che venne trovato nella dimostrazione del teorema I dovrà esistere un dominio $\alpha^{(p)}$ che sia un prolungamento di σ e contenga M nell'interno. Ma $\alpha^{(p)}$ dovrà evidentemente appartenere alla serie (II), quindi $f^{(p)}$ si dovrà comportare regolarmente negli intorni di M, ciò che dimostra la nostra proposizione.

Dimostrazione del teorema II. Ripetiamo le stesse operazioni come nella dimostrazione del teorema I, ma consideriamo invece le linee ℓ di lunghezza finita le quali conducono ad un punto regolare di diramazione in B. Io dico che dopo eseguito un numero *finito* p delle operazioni indicate si deve giungere ad un dominio α_p^* *al cui contorno* deve giacere il punto B. Infatti non è possibile giungere ad un dominio α_p^* nel cui *interno* giaccia il punto B, perché in tal caso la linea ℓ condurrebbe ad un elemento monodromo in B. Del resto non è possibile che si debba eseguire un numero infinito delle operazioni indicate prima di giungere ad un cerchio α_p^* il cui contorno passi per B. Infatti se ciò fosse si otterrebbero una infinità di punti A_1, A_2, ..., A_n, ... i quali avrebbero un punto limite su ℓ. Questo non può essere un punto diverso da B per la ragione addotta nella dimostrazione del teorema I. Resta da provare che non può essere nemmeno B. Infatti se r è il raggio del dominio di diramazione corrispondente alla porzione di diramazione della funzione con cui si deve giungere in B, per la definizione data di punto regolare di diramazione, avremo che quando i punti A_n saranno distanti da B meno di $r/4$, i loro dominii σ_n di monodromia dovranno avere al contorno il punto B, come pure dovranno avere al contorno il punto B i dominii di monodromia di tutti i punti interni a σ_n che si otterranno prolungando il dominio σ_n.

Si ha dunque che il dominio di diramazione che si troverà in B si otterrà prolungando il dominio α_p^*, dovrà dipendere solo da α_p^*, e quindi i dominii di diramazione in B formeranno un insieme numerabile.

Dimostrazione del teorema III. Prendiamo un campo ϑ qualunque nel quale sia possibile prolungare la funzione. Dico che deve trovarsi in esso un punto a cui non corrisponde alcun dominio di diramazione. Infatti prendiamo la serie (I) in cui vennero ordinati tutti i dominii α, α_1, ... e ripetiamo le stesse operazioni che vennero eseguite nella dimostrazione del corollario II. Si troverà in tal modo un punto M interno a ϑ che sarà situato internamente a tutti i cerchi ϑ', ϑ'', ϑ''', ... E' evidente che M non potrà giacere al contorno di nessuno dei dominii della serie (I); dunque ricordando la dimostrazione del teorema precedente si riconoscerà immediatamente che al punto M non potrà corrispondere alcun dominio di diramazione.

Dimostrazione del teorema IV. Per quello che abbiamo riconosciuto nella dimostrazione del Teorema II, preso un punto qualunque regolare di diramazione dovrà esistere almeno un dominio $\alpha^{(p)}$ della serie (I) sul cui contorno esso giace e tale che il dominio di diramazione è un suo prolungamento. Ora preso un dominio $\alpha^{(p)}$ consideriamo tutti i punti regolari di diramazione $M^{(p)}$ che giacciono sul suo contorno e i cui dominii sono un prolungamento di $\alpha^{(p)}$. Essi dovranno formare un insieme isolato. Infatti il dominio di diramazione di uno qualunque di essi, separerà sulla circonferenza del cerchio $\alpha^{(p)}$ un arco entro il quale non potranno esistere altri punti del gruppo $M^{(p)}$. Ne segue che i punti $M^{(p)}$ formeranno un insieme enumerabile e perciò potremo prenderli tutti ordinandoli in una serie

$$M_1^{(p)}, M_2^{(p)}, \ldots, M_q^{(p)} \ldots.$$

Prendiamo ora tutti i punti $M_q^{(p)}$ ed ordiniamoli secondo l'ordine di grandezza della somma $p + q$; avremo così enumerato tutti i punti regolari di diramazione.

ACKNOWLEDGMENTS

This research has been carried out in the course of a program financed by the Consiglio Nazionale delle Ricerche and by the Faculty of Mathematical, Physical and Natural Sciences of the University of Rome. We would like to thank Professor Giuseppe Montalenti, President of the Accademia Nazionale dei Lincei, for giving us free access to the Volterra Archives and for the authorization to publish the letters and manuscripts contained in this article. We also thank Professor Emilio Garroni (of the University of Rome) for the help he gave us in the transcription of Cantor's letter (No. 2 of Appendix A).

NOTES

1. Riemann's approach was essentially intuitive, not only with respect to his theory of analytic functions but, more generally, with respect to his introduction of the concept of manifold. As M. Kline points out, "Riemann is often described as a pure mathematician, but this is far from correct" [Kline 1972, 655]. With regard to the intuitive character of Riemann's views on geometry, see also Kline [1980, 293, 85-86].

2. There exist many examples of the application of this teleological conception of the history of mathematics to Cantor's case. For example, Bourbaki in the *Eléments d'histoire des mathématiques*, ascribes a fundamental role in the "enlargement of axiomatic method" not only to Cantor but also to Poincaré (largely owing to Poincaré's statement that axioms are "disguised definitions") [Bourbaki 1974, 33-34]. N. Bourbaki, furthermore, connects the success of axiomatics with the success of Cantor's ideas: "Towards the end of the nineteenth century Cantor's basic ideas had won the victory. During that very period, the formalization of mathematics was achieved and the use of the axiomatic method was almost universally accepted" [Bourbaki 1974, 46]. On this subject see also Dieudonné [1939], Cartan [1943], and, more recently, Dieudonné [1978, for instance, 373].

3. For the biography of Vivanti, see Cinquini [1950].

4. The definition of "analytic point" can be found in Appendix C.

5. See the works of L. Fuchs published in *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* (Berlin, 1884, 1885, 1886).

REFERENCES

Bourbaki, N. 1974. *Eléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann.

Browder, F. E. 1975. *The relation of functional analysis to concrete analysis in 20th century mathematics*, Proceedings of the American Workshop on the Evolution of Modern Mathematics, Boston, Mass., August 7-9, 1974. *Historia Mathematica* 2.

Cartan, H. 1943. Sur le fondement logique des mathématiques. *Revue Scientifique* 81, 3-11.
Cinquini, S. 1950. Commemorazione di Giulio Vivanti. *Rendiconti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere* 83, 184-205.
Dauben, J. W. 1979. *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press.
Dieudonné, J. 1939. Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques. *Revue Scientifique 77, 224-232.*
——— 1974. *Cours de géométrie algébrique,* Vol. 1. Paris, Presses Universitaires de France.
——— 1978. *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900.* Vol. 1. Paris: Hermann.
Fichera, G. 1959. *Funzioni analitiche di una variabile complessa.* Roma: Veschi.
Israel, G. 1980. Le due vie della matematica italiana contemporanea. In *Atti del Convegno "Recasting of Science between the two World Wars," June-July 1980, Rome/Florence,* in press.
——— 1981. 'Rigor' and 'Axiomatics' in Modern Mathematics. *Fundamenta Scientiae* 2, 205-219.
——— 1982. Volterra Archive at the Accademia Nazionale dei Lincei. *Historia Mathematica* 9, 229-238.
Kline, M. 1972. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford Univ. Press.
——— 1980. *Mathematics, The Loss of Certainty.* New York: Oxford Univ. Press.
Lakatos, I. 1976. *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.* London/New York: Cambridge Univ. Press.
Poincaré, H. 1883. Sur un théorème de la théorie générale des fonctions, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 11, 112-125.
——— 1888. Sur une propriété des fonctions analytiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Series II,* 197-200.
——— 1899. L'oeuvre mathématique de weierstrass. *Acta Mathematica* 22, 1-18.
Riemann, B. 1854. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. *Abhandlugen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen,* 13, 1868, 1-20.
Vivianti, G. 1888a. Sulle funzioni ad infiniti valori. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Series II,* 135-138.
——— 1888b. Ancora sulle funzioni ad infiniti valori. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Series II,* 150-151.
Volterra, V. 1888. Sulle funzioni analitiche polidrome. *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Series 4,* 355-361.
Weyl, H. 1913. *Die Idee der Riemannschen Fläche.* Leipzig: Teubner.